

# סטטיסטיקה ב



## תוכן העניינים

|     |                                                     |     |
|-----|-----------------------------------------------------|-----|
| 1.  | קומבינטוריקה - כלל המכפלה                           | 1   |
| 2.  | קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה    | 5   |
| 3.  | קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה             | 7   |
| 4.  | המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות              | 9   |
| 5.  | המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן       | 11  |
| 6.  | התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית          | 13  |
| 7.  | התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה            | 16  |
| 8.  | התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית         | 19  |
| 9.  | התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית          | 22  |
| 10. | הסקה סטטיסטית - הקדמה                               | 30  |
| 11. | התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי                   | 33  |
| 12. | מושגי יסוד באמידה                                   | 39  |
| 13. | רווח סמך לתוחלת (ממוצע)                             | 44  |
| 14. | רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים | 54  |
| 15. | רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים     | 56  |
| 16. | מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים                       | 58  |
| 17. | בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)                       | 64  |
| 18. | בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים     | 87  |
| 19. | בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים           | 98  |
| 20. | הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות        | 108 |
| 21. | מבחני חי בריבוע                                     | 111 |
| 22. | שאלות מסכמות בבדיקת השערות                          | 133 |
| 23. | ניתוח שונות חד כיוונית                              | 146 |

# תוכן העניינים

# סטטיסטיקה ב

פרק 1 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1



## קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

**רקע:**

**כלל המכפלה:**

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש  $k$  שלבים:  $n_1$  אפשרויות לשלב הראשון,  $n_2$  אפשרויות לשלב השני...  $n_k$  אפשרויות לשלב  $k$ :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה:  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6, n_2 = 2$$

$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26, n_2 = 10, n_3 = 10, n_4 = 10, n_5 = 10$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

## שאלות:

- (1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים :
- הטלת קובייה פעמים.
  - מספר תלת ספרתי.
  - בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
  - חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.
- (2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
- בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן : סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן : סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן : קפה, תה ולימונדה.
- כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
  - אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות :
    - בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
    - בארוחה סלט, לזניה ותה.
- (3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות :
- המספר הוא זוגי.
  - במספר כל הספרות שונות.
  - במספר כל הספרות זהות.
  - במספר לפחות שתי ספרות שונות.
  - במספר לפחות שתי ספרות זהות.
  - המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).
- (4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות :
- כולם ירו בקומה החמישית.
  - כולם ירדו באותה קומה.
  - כולם ירדו בקומה אחרת.
  - ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

- (5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- (6) מטילים קובייה 4 פעמים.
- א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
  - ב. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
  - ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
  - ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
- (7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
- א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו-L?
  - ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
  - ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
  - ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).

## תשובות סופיות:

- (1) א. 36    ב. 900    ג. 70    ד. 90
- (2) א. 36    ב. i.  $\frac{1}{36}$     ב. ii.  $\frac{1}{9}$
- (3) א. 0.5    ב. 0.3024    ג. 0.0001    ד. 0.9999    ה. 0.6976    ו. 0.01
- (4) א.  $\frac{1}{8^5}$     ב.  $\frac{1}{8^4}$     ג. 0.205    ד.  $\frac{1 \cdot 1 \cdot 7^3}{8^5}$
- (5) א. 3375    ב. 2730
- (6) א.  $\frac{1}{216}$     ב.  $\frac{5}{18}$     ג.  $\frac{13}{18}$     ד.  $\frac{215}{216}$
- (7) א.  $\frac{23^5}{26^5}$     ב.  $\frac{1}{26^4}$     ג.  $1 - \frac{1}{26^4}$     ד.  $\frac{1}{26^2}$

## סטטיסטיקה ב

פרק 2 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 5

## קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

### רקע:

#### מדגם סידור בדגימה עם החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת  $k$  עצמים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא:  $n^k$ .

דוגמה:

בחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב?  $10^3 = 1,000$ ,  $k = 3$ ,  $n = 10$ .

#### מדגם סידור ללא החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים ( $n \geq k$ ) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

דוגמה:

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד:  $\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ .

## שאלות:

- (1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
- ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?
- (2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A (עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
- א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
- ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
- ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?
- (3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?
- (4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
- א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
- ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?
- (5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 8000      ב. 6840
- (2) א. 0.0001      ב. 0.6561      ג. 0.3439
- (3) 0.476
- (4) א. 0.04      ב. 0.48
- (5) א.  $40^5$       ב. 78,960,960

## סטטיסטיקה ב

פרק 3 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 7



## קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר אין

משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה:  $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\cdot \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

הערות:

$$\cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1)$$

$$\cdot \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad (2)$$

$$\cdot \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (3)$$

## שאלות:

- (1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
- אין שום הגבלה לבחירה.
  - מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
  - לא יהיו בנים במשלחת.
- (2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
- כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
  - כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
  - כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
  - כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?
- (3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות.
- יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
  - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
  - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?
- (4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
- מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

## תשובות סופיות:

- |     |           |           |            |
|-----|-----------|-----------|------------|
| (1) | א. 53130  | ב. 20475  | ג. 3003    |
| (2) | א. 252    | ב. 100    | ג. 100     |
|     |           |           | ד. 60      |
| (3) | א. 0.1117 | ב. 0.1445 | ג. 0.9819  |
| (4) | א. 0.02   | ב. 0.187  | ג. 0.972   |
|     |           |           | ד. 0.00246 |

## סטטיסטיקה ב

פרק 4 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 9

## המשתנה המקרי הבדיד – פונקציית ההסתברות:

**רקע:**

**משתנה מקרי בדיד:**

משתנה מקרי בדיד הינו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.

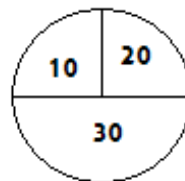
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

**פונקציית ההסתברות:**

פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה. סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקזינו יש רולטה כמתואר בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-ש. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

## שאלות:

- (1) ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה היא:
- 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
  - 70 משפחות עם מכונית אחת.
  - 60 משפחות עם 2 מכוניות.
  - 20 משפחות עם 3 מכוניות.
- בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את  $X$  להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
- (2) מהאותיות:  $A, B, C$  יוצרים קוד דו תווי.
- א. כמה קודים ניתן ליצור?
  - ב. רשמו את כל הקודים האפשריים.
  - ג. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהאות  $B$  מופיעה בקוד.
- בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

## תשובות סופיות:

- (1) להלן טבלה:

|        |      |      |     |     |
|--------|------|------|-----|-----|
| $X$    | 0    | 1    | 2   | 3   |
| $P(X)$ | 0.25 | 0.35 | 0.3 | 0.1 |

- (2) להלן טבלה:

|        |               |               |               |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| $X$    | 0             | 1             | 2             |
| $P(X)$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

## סטטיסטיקה ב

פרק 5 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. כללי ..... 11

## המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

### רקע:

#### תוחלת:

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

$$\text{מגדירים תוחלת באופן הבא: } E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

#### שונות:

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

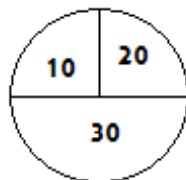
$$\text{מגדירים שונות באופן הבא: } V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

#### סטיית תקן:

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים:  $STD = \sigma$ .

#### דוגמה:

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-ש. הסתברות לקבלת הסכומים השונים:



|     |      |      |        |
|-----|------|------|--------|
| 30  | 20   | 10   | $X$    |
| 0.5 | 0.25 | 0.25 | $P(X)$ |

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$$

$$= (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5 = 68.75 = \sigma^2$$

$$\text{כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות: } \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

## שאלות:

- (1) אדם משחק במשחק מזל.  
נגדיר את  $X$  להיות סכום הזכייה.  
להלן פונקציית ההסתברות של  $X$ :

|     |     |     |     |        |
|-----|-----|-----|-----|--------|
| 40  | 20  | 0   | -30 | $X$    |
| 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.4 | $P(X)$ |

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של  $X$ ?

- (2) בישוב מסוים שני סניפי בנק: בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים. יהי  $X$  מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון. חשבו את:  $E(X)$ .

## תשובות סופיות:

- (1) תוחלת: 2, שונות: 796.  
(2) 0.9.



## סטטיסטיקה ב

פרק 6 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 13

## התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

### רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי :

ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון". למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה. בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי  $n$  פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה. מגדירים את  $X$  להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- $P$  את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד, וב- $Q$  את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

ואז נגיד ש:  $X \sim B(n, p)$ .

### פונקציית ההסתברות של $X$ :

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1; \quad 0! = 1$$

לגודל:  $\binom{n}{k}$  ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת:}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות:}$$

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

- (1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
- (2) חוזרים על הניסוי  $n$  פעמים.
- (3)  $X$  – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

- א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

## שאלות:

- (1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את  $X$  להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
- מהי ההתפלגות של  $X$ ?
  - מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
  - מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
  - מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?
  - מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
  - מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?
- (2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את  $X$  כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.
- מהי ההתפלגות של  $X$ ? הסבירו.
  - מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
  - מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
  - מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?
- (3) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:
- | השכלה     | נמוכה | תיכונית | תואר I | תואר II ומעלה |
|-----------|-------|---------|--------|---------------|
| פרופורציה | 0.1   | 0.6     | 0.2    | 0.1           |
- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.
- מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
  - מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?
- (4) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
  - בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?

## תשובות סופיות:

(1) א.  $X \sim B(n=5, p=0.1)$     ב. 0.32805    ג. 0.59049

ד. 0.0729    ה. 0.40954    ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45

(2) א. 0.2335    ב. 0.1493    ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449

(3) א. 0.1789    ב. 2

(4) א. 0.1956    ב. 0.4253

## סטטיסטיקה ב

פרק 7 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 16

## התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות אחידה:

### רקע:

התפלגות אחידה הינה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות. הערכים המתקבלים בהתפלגות הם החל מ- $a$  ועד  $b$  בקפיצות של אחד.  $X \sim U(a, b)$ .

**פונקציית ההסתברות:**  $P(X = K) = \frac{1}{b - a + 1}$  ,  $K = a, a + 1, \dots, b$

**תוחלת:**  $E(X) = \frac{a + b}{2}$

**שונות:**  $V(X) = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם בוחר מספר אקראי בין 1 ל-100 כולל. מהי פונקציית ההסתברות של המספר ומה הצפי שלו?

## שאלות:

- (1) במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ-1 ועד 45. נתבונן במשתנה  $X$  – המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
- חשבו את  $P(X = 2)$ .
  - חשבו את  $P(X \leq 30)$ .
  - חשבו את  $P(X > 4 | X \leq 10)$ .
  - חשבו את  $P(X = k)$ .
- (2) קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל-100.
- בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?
  - הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר:
    - מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ-80?
    - מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?
- (3) יהי  $X$  התוצאה בהטלת קובייה.
- מהי ההתפלגות של  $X$ ?
  - מה התוחלת של  $X$ ?
  - קובייה הוטלה 4 פעמים. מה התוחלת ומה השונות של סכום התוצאות ב-4 ההטלות?
- (4) בכד 10 כדורים שרק אחד בצבע אדום. כדורים הוצאו ללא החזרה עד שהתקבל הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הכדורים שהוצאו?
- (5) יש לבחור מספר אקראי בין 1 ל-50, כולל.
- מה הסיכוי שהמספר 4 יבחר?
  - מה הסיכוי שהמספר שיבחר גדול מ-20?
  - אם נבחר מספר גדול מ-20, מה ההסתברות שהוא קטן מ-28?

## תשובות סופיות:

(1) א.  $\frac{1}{45}$     ב.  $\frac{30}{45}$     ג. 0.6

(2) א. תוחלת: 50.5, סטיית תקן: 28.87.

ב. i. 0.08192    ii. תוחלת: 303, סטיית תקן: 70.71.

(3) א.  $X \sim U(1,6)$     ב. 3.5    ג. תוחלת: 14, שונות: 11.66.

(4) תוחלת: 5.5, שונות: 8.25.

(5) א.  $\frac{1}{50}$     ב.  $\frac{30}{50}$     ג.  $\frac{7}{30}$



## סטטיסטיקה ב

פרק 8 - התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 19

## התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות פואסונית:

### רקע:

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.

$\lambda$  - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה אירועים בממוצע קורים ביחידת זמן:  $X \sim \text{pois}(\lambda)$ . התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

### פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}, \quad K = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

### התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

### תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר  $\lambda$  פרופורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

- א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
- ב. מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
- ג. מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
- ד. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

## שאלות:

- (1) במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
  - א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
  - ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
  - ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
  - ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?
- (2) מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
  - א. מה ההסתברות שבחלק זה ישנן בדיוק 18 טעויות?
  - ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
  - ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?
- (3) מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
  - א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
  - ב. מהי ההסתברות שבחודש (הניחו שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?
- (4) לחנות AM:PM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
  - א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
  - ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
  - ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
  - ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?
- (5) מספר הלידות בבית חולים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
  - א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
  - ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
  - ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

## תשובות סופיות:

|    |           |           |           |                                 |
|----|-----------|-----------|-----------|---------------------------------|
| (1 | א. 0.0337 | ב. 0.9933 | ג. 0.1246 | ד. 5.                           |
| (2 | א. 0.084  | ב. 0.099  | ג. 0.151  |                                 |
| (3 | א. 4.     | ב. 0.407  |           |                                 |
| (4 | א. 0.1804 | ב. 0.8647 | ג. 0.6767 | ד. תוחלת : 2, סטיית תקן : 1.41. |
| (5 | א. 0.0139 | ב. 0.2196 | ג. 0.6948 |                                 |

## סטטיסטיקה ב

פרק 9 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

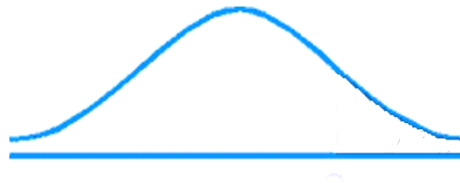
תוכן העניינים

1. כללי ..... 22

## התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

### רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

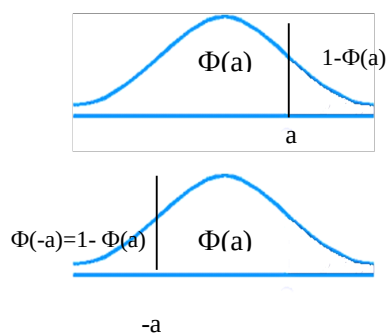
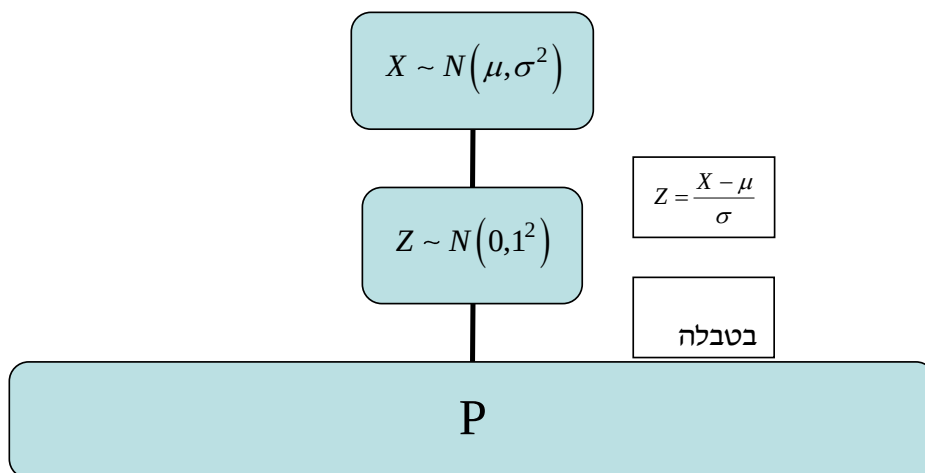
$$\text{נוסחת פונקציית הצפיפות: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

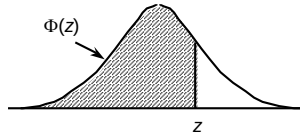
כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות  $Z$ :  $Z \sim N(0, 1^2)$ .

$$\text{תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:



**טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי  $\Phi(z)$  :**


| z   | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |

| z         | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.090 | 3.291  | 3.891   | 4.417    |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|----------|
| $\Phi(z)$ | 0.90  | 0.95  | 0.975 | 0.99  | 0.995 | 0.999 | 0.9995 | 0.99995 | 0.999995 |



דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- (1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
- (2) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
- (3) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
- (4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

## שאלות:

(1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

- א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
- ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
- ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
- ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
- ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

(2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.

- א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
- ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
- ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
- ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

(3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.

- א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?
- ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
- ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?
- ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?
- ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?

(4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.

- א. מצאו את העשירון העליון.
- ב. מצאו את האחוזון ה-95.
- ג. מצאו את העשירון התחתון.

- (5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.
- א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
  - ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
  - ג. מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
  - ד. מהו האחוזון ה-20?
  - ה. מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
- (6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
  - ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
  - ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
- (7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.
- א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
  - ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
  - ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?
  - ד. מהו המאיון העליון של אורך חיי מכשיר?
  - ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?
- (8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.
- א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
  - ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?
    - i. בעשירון העליון.
    - ii. בממוצע.
    - iii. בשונות.
    - ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
      - i. 1.
      - ii. 2.
      - iii. 3.
      - iv. אין לדעת.



- (9)** הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.
- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
- ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
- ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?
- ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?
- (10)** ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- $T$  דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של  $T$ ?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל  $T$ ?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
- (11)** אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

## תשובות סופיות:

|    |           |            |           |           |        |
|----|-----------|------------|-----------|-----------|--------|
| 1  | א. 89.25% | ב. 2.28%   | ג. 0.     | ד. 50%    | ה. 50% |
| 2  | א. 0%     | ב. 3.76%   | ג. 0%     | ד. 68.26% |        |
| 3  | א. 26.43% | ב. 89.44%  | ג. 39.44% | ד. 0.383  |        |
|    | ה. 100%   |            |           |           |        |
| 4  | א. 3812.8 | ב. 3958    | ג. 2787.2 |           |        |
| 5  | א. 119.2  | ב. 80.8    | ג. 112.6  | ד. 87.4   |        |
| 6  | א. 500    | ב. 532.9   | ג. 453.48 |           |        |
| 7  | א. 500    | ב. 100     | ג. 0.3446 | ד. 733    |        |
|    | ה. 267    |            |           |           |        |
| 8  | א. 3      | ב. בממוצע. | ג. 1      |           |        |
| 9  | א. 0.1587 | ב. 0.0228  | ג. 0.8563 | ד. 0.3975 |        |
| 10 | א. 1925   | ב. 0.2266  | ג. 0.1587 |           |        |
| 11 | א. 0.1359 | ב. 0.675   | ג. 100    | ד. 0.25   |        |

# סטטיסטיקה ב

פרק 10 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

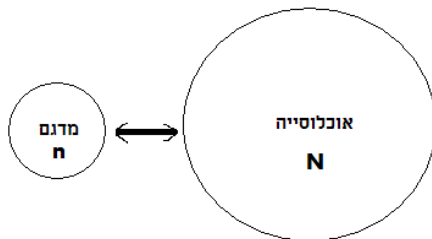
1. כללי ..... 30

## הסקה סטטיסטית – הקדמה:

### רקע:

#### אוכלוסייה:

קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



#### מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

#### סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

#### פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

### הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

| סטטיסטי (מדגם) | פרמטר (אוכלוסייה) | ממוצע                    |
|----------------|-------------------|--------------------------|
| $\bar{X}$      | $\mu$             |                          |
| $\hat{p}$      | $P$               | פרופורציה (שכיחות יחסית) |

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?



## שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה ב"העוגן". נגדיר את  $X$  להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלויזיה במדגם.
- מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
  - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

| מספר המשפחות       | מספר מקלטים |
|--------------------|-------------|
| 50                 | 0           |
| 250                | 1           |
| 350                | 2           |
| 300                | 3           |
| 50                 | 4           |
| סך הכול $N = 1000$ |             |

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מיהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה באוכלוסייה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו הסטטיסטי?

## תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות ב"העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב.  $\bar{X}$  = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

## סטטיסטיקה ב

פרק 11 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי ..... 33

## התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

### רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם:  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים. להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- $\mu$  (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- $\sigma^2$ .

סטיית תקן של אוכלוסייה:  $\sigma$ .

### תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:  $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$ .

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- $n$ .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי:  $V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ .

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן:  $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

**דגימה מהתפלגות נורמאלית:**

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ .

$$\text{ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.  
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

**משפט הגבול המרכזי:**

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$  אזי עבור מדגם מספיק

$$\text{גדול } (n \geq 30) \text{ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.  
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.  
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

## שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
  - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
  - מהי טעות התקן?
- (2) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם? נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
  - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?
- (3) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
  - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
  - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
  - מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

- (4) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלי.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
- ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
- ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
- ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (5) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלי עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
- ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
- ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
- ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (6) משתנה מתפלג נורמאלי עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
- ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
- הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.
- (7) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
- מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

8) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

9) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע

המדגם  $\bar{X}$ . לכן:  $P(\bar{X} > \mu)$  יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.

ב. 0.5.

ג. 1.

ד. לא ניתן לדעת.

10) נתון ש- $X$  מתפלג כלשהו עם תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א.  $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

ב.  $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

ג.  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

ד.  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

11) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . אם נדגום  $n$  תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר:  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א.  $\mu$  ו- $\bar{X}$  יהיו משתנים מקריים.

ב.  $\mu$  יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$  קבוע.

ג.  $\bar{X}$  יהיה משתנה מקרי ו- $\mu$  קבוע.

ד.  $\mu$  ו- $\bar{X}$  יהיו קבועים.

## תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.  
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.  
ה. 78. ו. 10.6.
- (2) א. 0.8413 ב. 0.0013 ג. 0. ד. 0.1974.
- (3) א. 0 ב. 0 ג. 0.9544 ד. 178.205.
- (4) א. 0.0465 ב. 27.71 ג. 0.2628 ד. התשובה הייתה קטנה.
- (5) א. 0 ב. 0.1587 ג. 0.1587 ד. 0.5.
- (6) א. 0.5468 ב. 0.6826
- (7) 0.0475
- (8) א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 271.
- (9) ב'.
- (10) ד'.
- (11) ג'.



# סטטיסטיקה ב

פרק 12 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 39

## מושגי יסוד באמידה:

### רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל -  $\mu$ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה -  $p$ . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות  $\theta$  ואומד ב- $\hat{\theta}$ .  $\hat{\theta}$  הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את  $\theta$ .
- שגיאת אמידה:  $|\hat{\theta} - \theta|$  - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- א. מה הפרמטר בדוגמה זו?
  - ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $\hat{\theta}$  יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$  אם התוחלת של  $\hat{\theta}$  תהיה שווה ל- $\theta$ :  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .
  - טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר:  $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$ .

### פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

#### ממוצע האוכלוסייה $\mu$ :

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם:  $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$E(\bar{x}) = \mu$  לכן  $\bar{x}$  הינו אומד חסר הטיה ל- $\mu$ . כמו כן, טעות תקן:  $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$

#### פרופורציה באוכלוסייה $p$ :

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם:  $\hat{p} = \frac{y}{n}$

$E(\hat{p}) = p$ , לכן  $\hat{p}$  הינו אומד חסר הטיה ל- $p$ . כמו כן טעות התקן:  $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$

#### שונות האוכלוסייה $\sigma^2$ :

האומד הנקודתי שלו יהיה:  $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

$E(S^2) = \sigma^2$  ולכן  $S^2$  הינו אומד חסר הטיה ל- $\sigma^2$ :  $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$

**הערה:** אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.  
להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.  
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

## שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$ ,  $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$ .
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
  - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של המדגם.
  - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

- א. 3.
- ב. 2.5.
- ג. 1.581.
- ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע,  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , מחולק ב- $n-1$ ?

- א. כאשר  $n$  קטן.
- ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
- ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
- ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
- ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8)  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע  $\mu$  לא ידוע ושונות:  $\sigma^2 = 64$ . טעות התקן של האומד ל- $\mu$  היא:

- א. 16.
- ב. 8.
- ג. 4.
- ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

- א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.



## סטטיסטיקה ב

פרק 13 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה ..... 44
- 2. קביעת גודל מדגם ..... 49
- 3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה ..... 51

## רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

### רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמיתי הוא אפסי.

מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.

נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר  $\mu$  ייכלל בתוכו הוא:  $1-\alpha$ .

$1-\alpha$ : נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש:  $P(A \leq \mu \leq B) = 1-\alpha$ .

A - גבול התחתון של רווח הסמך.

B - הגבול העליון של רווח הסמך.

$L = B - A$  - אורך רווח הסמך.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?



בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת ( $\mu$ ) במקרה ש- $\sigma^2$  (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד:  $\mu$ .

אומד נקודתי:  $\bar{x}$ .

תנאים לבניית רווח הסמך:  $X \sim N$  או  $n \geq 30$ .

$\sigma^2$  (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך:  $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית:  $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\varepsilon$  - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית:  $L = 2\varepsilon$ .
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך:  $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$ .
- ככל שמספר התצפיות ( $n$ ) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון  $(1-\alpha)$  גבוהה יותר, כך:  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

## שאלות:

- (1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
  - מה המשתנה הנחקר?
  - מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
  - מה רווח הסמך לפרמטר?
  - מהי רמת הסמך לפרמטר?
  - מה אורך רווח הסמך?
  - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- (2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.
- (3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
- (4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
  - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
  - מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
  - אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

- (5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:
- א. ממוצע המדגם.
  - ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
  - ג. רמת הסמך.
- (6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
  - ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
  - ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- (7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא:  $82 < \mu < 92$ . נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- א. מהו ממוצע המדגם?
  - ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
  - ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?
- (8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.
- א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
  - ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
  - ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
  - ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

(9) חוקר בנה רווח סמך ל- $\mu$  וקיבל:  $48 < \mu < 54$ . מה נכון בהכרח:

א.  $\mu = 51$ .

ב.  $\bar{X} = 6$ .

ג.  $\bar{X} = 51$ .

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

(10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

### תשובות סופיות:

(1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-ש. ג.  $\mu$ . ד.  $9200 < \mu < 9800$ .

ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

(2)  $4920.6 < \mu < 4979.4$

(3) א.  $223.42 < \mu < 236.58$ . ב.  $222.16 < \mu < 237.84$ .

ג. ראה סרטון.

(4) א.  $9284 < \mu < 10,116$ . ב. הסטיה המירבית בין  $\bar{x}$  ל- $\mu$  היא 416 שם בבטחון של 95%.

ג. 800. ד. לא.

(5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

(6) א.  $4.42 < \mu < 83.5$ . ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

(7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

(8) ב'.

(9) ג'.

(10) ד'.

## קביעת גודל מדגם:

### רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה:  $\sigma$  ברמת סמך של  $1-\alpha$  ושגיאת אמידה שלא תעלה על  $\varepsilon$  מסוים, נציב

$$.n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 \quad \text{בנוסחה הבאה:}$$

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמיתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

## שאלות:

- (1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
- (2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.
- א. כמה מתגייסים יש לדגום?
- ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
- (3) יהי  $X$  משתנה מקרי עם ממוצע  $\mu$  וסטיית תקן  $\sigma$ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- $\mu$  ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה  $0.5\sigma$ . מהו גודל המדגם הנדרש?

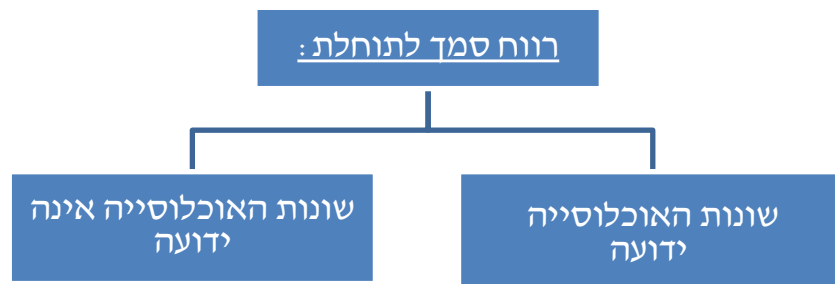
## תשובות סופיות:

- (1) 780.
- (2) א. 139. ב. הדבר יקטין את  $\varepsilon$  פי 2.
- (3)  $n = 62$ .

## רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

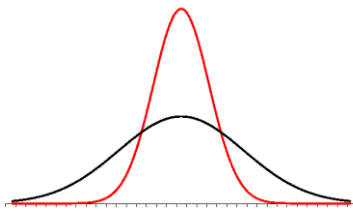


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה  $(\sigma^2)$  אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

**התנאי:**  $X \sim N$  או שהמדגם גדול.

**רווח סמך:**  $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$



$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} \quad \text{האומד לשונות:}$$

**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה

להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן:  $df = n-1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות

שהתקבלו בדקות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

## שאלות:

- (1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.
  - ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?
  - ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
- (2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן:  $S = 13$  ס"מ. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
- (3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.
  - א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
  - ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
- (4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.
  - א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.
  - ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.
  - ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
- (5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ ,  $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$ .
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.



- (6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\bar{x} = 13.8$ ,  $S = 2$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.
- (7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר  $\mu$ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך. סטטיסטיקאי א': הניח  $\sigma = 20$ . סטטיסטיקאי ב': חישב לפי המדגם וקיבל  $S = 20$ . למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?
- א. סטטיסטיקאי א'.  
 ב. סטטיסטיקאי ב'.  
 ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.  
 ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.
- (8) נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $79.88 < \mu < 89.72$  ב. כן. ג. הוא היה גדל.
- (2) ראה בסרטון.
- (3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.
- (4) א.  $107.37 < \mu < 96.63$  ב.  $107.10 < \mu < 96.90$  ג. ראה בסרטון.
- (5)  $3.149 < \mu < 3.351$
- (6)  $13.42 < \mu < 14.18$
- (7) ב'.
- (8) 90%.

## סטטיסטיקה ב

פרק 14 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונניות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שונניות.....54

## כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

### רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות:  $\mu_1 - \mu_2$ , כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי:  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ .

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

$$2. X_1, X_2 \sim N.$$

3. מדגמים בלתי תלויים.

השונויות המשוקללת: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונויות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{הנוסחה הבאה:}$$

$$d.f = n_1 + n_2 - 2 \quad \text{דרגות החופש:}$$

$$\text{רווח סמך: } (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של  $1 - \alpha$ , לא קיים הבדל בין התוחלות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים. להלן תוצאות המדגם שנעשה:

| מספר האקדמאים                | תל אביב | באר שבע |
|------------------------------|---------|---------|
| 10                           | 20      |         |
| ממוצע הכנסות של אקדמאים      | 11,000  | 9500    |
| סטיית התקן של הכנסות אקדמאים | 200     | 250     |

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים. הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

## שאלות:

- (1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

| המדינה              | ישראל   | ארה"ב   |
|---------------------|---------|---------|
| גודל המדגם          | 15      | 15      |
| סכום הציונים        | 1560    | 1470    |
| סכום ריבועי הציונים | 165,390 | 147,560 |

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (2) להלן 4 תצפיות על משתנה  $X$  שמתפלג:  $N(\mu_x, \sigma^2)$ , ומשתנה  $Y$  שמתפלג:  $N(\mu_y, \sigma^2)$ .

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| X | 22 | 20 | 21 | 25 |
| Y | 18 | 25 | 17 | 12 |

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y - \mu_x$  ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

## תשובות סופיות:

- (1) הנחות:
- השונות שווה.
  - שהציונים מתפלגים נורמלית.
  - המדגמים אינם תלויים זה בזה.
- $$-5.52 < \mu_1 - \mu_2 < 17.52$$
- (2)
- $$-9.6 < \mu_y - \mu_x < 1.6$$

## סטטיסטיקה ב

פרק 15 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים ..... 56

## רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

### רקע:

**מדגם מזווג:** מדגם אחד שבו יש  $n$  צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים:  $X$  ו- $Y$ .

ניצור משתנה חדש:  $D = x - y$ .

הפרמטר שנרצה לאמוד:  $\mu_D$ .

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \quad x, y \sim N$$

2. המדגם מזווג.

$$\text{נוסחת רווח הסמך: } \bar{D} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

כאשר דרגות החופש:  $df = n - 1$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב. לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

| הקובץ               | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---------------------|----|----|----|----|----|
| הזמן בתוכנה הראשונה | 25 | 48 | 49 | 46 | 38 |
| הזמן בתוכנה השנייה  | 27 | 46 | 42 | 40 | 48 |

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.

מצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

## שאלות:

- (1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב' :

|     |    |    |    |    |          |
|-----|----|----|----|----|----------|
| 82  | 75 | 90 | 68 | 74 | סמסטר א' |
| 100 | 76 | 87 | 84 | 80 | סמסטר ב' |

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.
- ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?
- ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?
- (2) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות :

| חברה/ מדינה  | ארה"ב | קנדה | הולנד | פולין | מצרים | סין | יפן |
|--------------|-------|------|-------|-------|-------|-----|-----|
| בזק - X      | 1.5   | 2.1  | 2.2   | 3     | 3.5   | 3.2 | 4.2 |
| קווי זהב - Y | 1.4   | 2    | 1.9   | 3.1   | 3.3   | 3.2 | 4.2 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה, בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-19 < \mu_0 < 38$  . ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
- ג. ראה הסבר בסרטון.
- (2)  $-0.013 < \mu < 0.185$  .

## סטטיסטיקה ב

פרק 16 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

|    |                |
|----|----------------|
| 58 | 1. הקדמה       |
| 62 | 2. סוגי טעויות |



## הקדמה:

### רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

**שלב א:** נוהה את הפרמטר הנחקר.

**שלב ב:** נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב-  $H_0$ .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב-  $H_1$ .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

**שלב ג:** נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

**שלב ד:** נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב-  $\alpha$ .

**שלב ה:** בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

**שלב ו:** להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

## שאלות:

## בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

## תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.  
 ב. ציון.  
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.  
 ד.  $H_0: \mu = 72$   
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.  
 ב. נפח משקה בסמ"ק.  
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.  
 ד.  $H_0: \mu = 500$   
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.  
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).  
 ג. אחוז הקבלה.  
 ד.  $H_0: p = 0.25$   
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.  
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).  
 ג. אחוז האבטלה כיום.  
 ד.  $H_0: p = 0.08$   
 $H_1: p \neq 0.08$

## סוגי טעויות:

### רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.  
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.  
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

|  | הכרעה |             |             |
|--|-------|-------------|-------------|
|  |       | $H_0$       | $H_1$       |
|  | מצאות | $H_0$       | $H_1$       |
|  |       | אין טעות    | טעות מסוג 1 |
|  |       | טעות מסוג 2 | אין טעות    |

### הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את  $H_0$  למרות שבמצאות  $H_0$  נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את  $H_0$  למרות שבמצאות  $H_1$  נכונה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.  
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

## שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מה מסקנת המחקר?  
 ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?  
 ב. מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?  
 ב. מה המשתנה הנחקר?  
 ג. מה הפרמטר הנחקר?  
 ד. מה השערות המחקר?  
 ה. מה מסקנת המחקר?  
 ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $H_0: \mu = 500$   
 ב. לא דחינו את  $H_0$ .  
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.  
 ב. טעות מסוג ראשון.
- (3) א. משפחות כיום.  
 ב. מס' הילדים.  
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.  
 ד.  $H_0: \mu = 2.3$   
 $H_1: \mu < 2.3$   
 ה. לא לדחות את  $H_0$ . ו. טעות מסוג שני.

## סטטיסטיקה ב

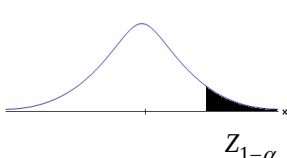
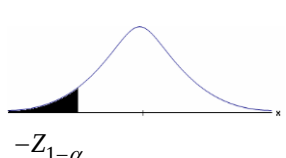
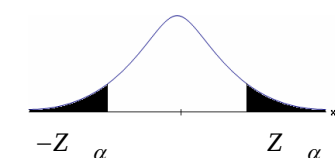
פרק 17 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה. .... 64
2. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה) .... 68
3. בדיקת השערות על תוחלת ( ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה. .... 73
4. ניתוח פלטים. .... 77
5. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע). .... 82
6. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה). .... 84

## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:       | $H_0: \mu \leq \mu_0$<br>$H_1: \mu > \mu_0$                                                                                                            | $H_0: \mu \geq \mu_0$<br>$H_1: \mu < \mu_0$                                                                                                              | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu \neq \mu_0$                                                                                                                                                                                              |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| תנאים:                             | 1. $\sigma$ ידועה<br>2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול                                                                                                  |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                          |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ : | $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$<br><br>$Z_{1-\alpha}$<br>דוחים את $H_0$ | $Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$<br><br>$-Z_{1-\alpha}$<br>דוחים את $H_0$ | $Z_{\bar{x}} < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{\frac{\alpha}{2}}$<br><br>$-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$<br>דוחים את $H_0$ |

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

|                                                                |                                                                |                                                                                                                                                        |                       |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| $\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X} > \mu_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{X} < \mu_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | נדחה $H_0$ אם מתקיים: |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|



**דוגמה:**

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזוּבְלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

**פיתרון:**

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה:  $X =$  יבול העגבניות בטון לעונה.

הפרמטר:  $\mu =$  תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

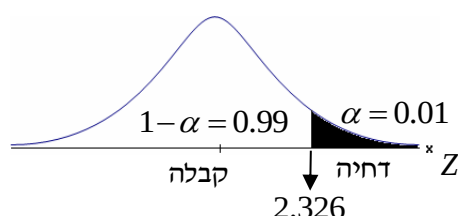
השערות:  
 $H_0: \mu = 10$   
 $H_1: \mu > 10$

תנאים:

1.  $X \sim N$ .

2.  $\sigma = 2.5$ .

כלל הכרעה:



נדחה את  $H_0$  אם  $Z_{\bar{X}} > 2.326$

תוצאות:  $n = 4$ ,  $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן:  $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב:  $Z_{\bar{X}} = \frac{12.5 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

מסקנה:

לא נדחה  $H_0$  (נקבל  $H_0$ ).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

## שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
  - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
  - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
  - א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
  - ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
  - ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
  - ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות:  $H_0: \mu = \mu_0$  כנגד  $H_1: \mu > \mu_0$ ,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

### תשובות סופיות:

- (1) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.
- (2) א. נדחה  $H_0$ , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.  
ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של  $H_0$  והמסקנה לא תשתנה.
- (3) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.
- (4) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.
- (5) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.
- (6) א'.
- (7) ג'.
- (8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

## מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- $p_v$ . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות. המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם  $p_v \leq \alpha$ , דוחים את  $H_0$ . מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = P_{H_0}$ .

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = 2P_{H_0}$ .

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

| השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבה:          |                                          | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu \neq \mu_0$                                                                                                    |  |
|------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu > \mu_0$ | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu < \mu_0$ | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu \neq \mu_0$                                                                                                    |  |
| 1. $\sigma$ ידועה                        |                                          | תנאים:                                                                                                                                         |  |
| 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול         |                                          | p-value                                                                                                                                        |  |
| $P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$          | $P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$          | אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} > \mu_0$<br>אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} < \mu_0$ |  |

כאשר בהנחת השערת האפס:  $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ,  $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

**דוגמה:**

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

**פתרון:**

א. אוכלוסייה: המתגייסים לצבא כיום.

משתנה:  $X$  = משקל בק"ג.

פרמטר:  $\mu$ .

השערות:  
 $H_0: \mu = 65$   
 $H_1: \mu > 65$

תנאים:

1.  $X \sim N$ .

2.  $\sigma = 12$ .

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left( \begin{array}{c} \text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני} \end{array} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

## שאלות:

- (1) להלן השערות של מחקר:  $H_0: \mu = 70$ ,  $H_1: \mu > 70$ . המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות:  $n = 100$ ,  $\bar{x} = 74$ . מהי מובהקות התוצאה?
- (2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?
- (3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
  - א. רשמו את השערות המחקר.
  - ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
  - ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?
  - ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?
- (4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.
  - א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?
  - ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
  - ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.
- (5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

- (6) בבדיקת השערות התקבל שה-  $p\text{-value} = 0.02$ . מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחרו בתשובה הנכונה.
- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
  - ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
  - ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
  - ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
  - ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
  - ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
  - ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.
- (8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל:  $p\text{ value} = 0.0254$  לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את  $H_0$ .
  - ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את  $H_0$ .
  - ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את  $H_0$ .
  - ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את  $H_0$ .

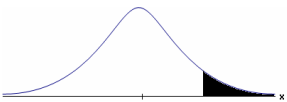
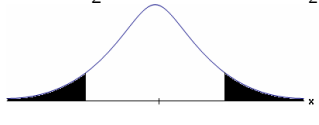
## תשובות סופיות:

- (1) 0.0228.
- (2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) א.  $H_0: \mu = 100$   
 $H_1: \mu < 100$   
 ב. 0.1056 ג. 0.1056.
- ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (4) א. 0.0006 ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.



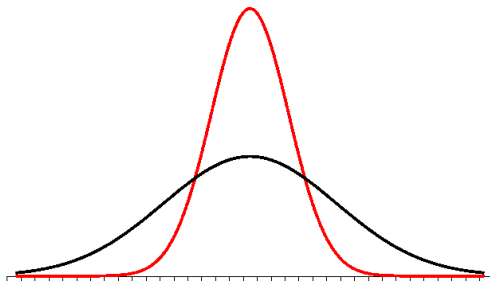
## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

| השערת האפס:<br>השערה<br>אלטרנטיבה:                | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu > \mu_0$                                                                                                                              | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu < \mu_0$                                                                                                                                | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu \neq \mu_0$                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| תנאים:                                            | 1. $\sigma$ אינה ידועה<br>2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול                                                                                                            |                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| כלל ההכרעה:<br>אזור הדחייה<br>של $H_0$ :          | $t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$<br><br>$t_{1-\alpha, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$<br><br>$-t_{1-\alpha, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$<br><br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ |
| חלופה לכלל<br>ההכרעה:<br>נדחה $H_0$ אם<br>מתקיים: | $\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$                                                                                                       | $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$                                                                                                         | $\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$                                                                                                                 |

$$. t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

$$. S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



### התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן:  $df = n - 1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

## שאלות:

(1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

(2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

(3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

- (5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות  $Z$ . רוני השתמשה בטבלה של התפלגות  $t$ . מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
  - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
  - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
  - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

- (6) נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = \mu_0$  .  $H_1: \mu < \mu_0$  . חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
  - ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
  - ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

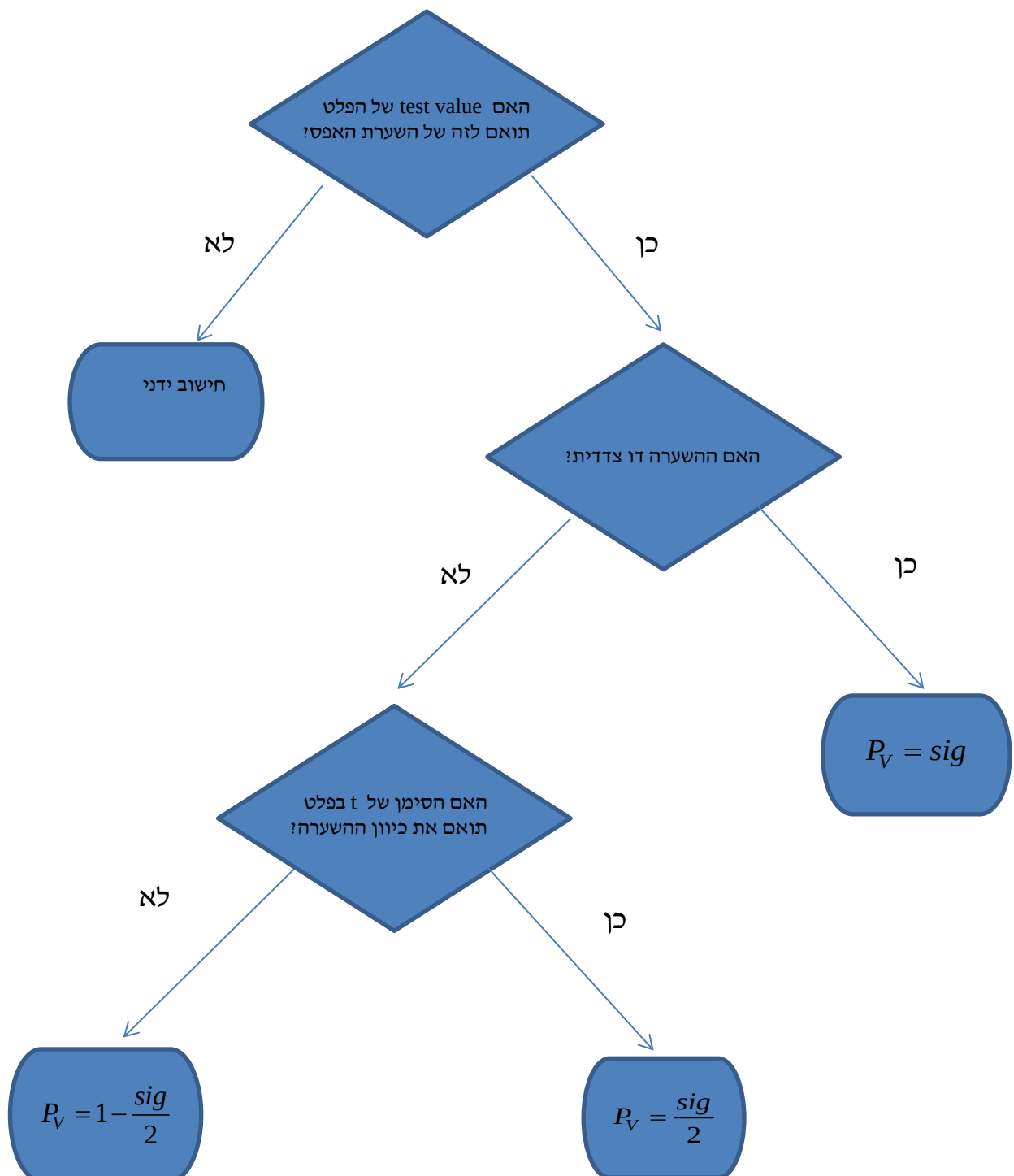
### תשובות סופיות:

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) נדחה  $H_0$ .
- (3) נקבל  $H_0$ .
- (4) נקבל  $H_0$ .
- (5) ב'.
- (6) ג'.

## ניתוח פלטים:

רקע:

חישוב מובהקות התוצאה באמצעות פלט תוכנת SPSS:



## דוגמה (פתרון בהקלטה):

One-Sample Statistics

|           | N  | Mean    | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|-----------|----|---------|----------------|-----------------|
| $\bar{X}$ | 25 | 87.6400 | 64.90434       | 12.98087        |

One-Sample Test

| Test Value = 60 |       |    |                 |                 |                                           |         |
|-----------------|-------|----|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|---------|
|                 |       |    |                 | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |         |
|                 | t     | df | Sig. (2-tailed) |                 | Lower                                     | Upper   |
| $\bar{X}$       | 2.129 | 24 | .044            | 27.64000        | .8488                                     | 54.4312 |

ממוצע הציונים במבחן המיצב בחשבון הוא 60. הוחלט לדגום כיתה אקראית של 25 תלמידים וללמד אותם בשיטת לימוד חדשה.

- א. מהו רווח הסמך לממוצע הציונים בחשבון אם יוחלט ליישם את שיטת הלימוד החדשה?
- ב. מהו  $P_V$  לבדיקת יעילותה של שיטת הלימוד החדשה?
- ג. מה יוכרע ברמת מובהקות של 5% לגבי יעילותה של שיטת הלימוד החדשה?

## שאלות:

- 1) באוניברסיטה גדולה גיל הסטודנטים לתואר ראשון מתפלג נורמאלי. בעבר פורסם שהגיל הממוצע של הסטודנטים הינו 23. להלן פלט תוכנת SPSS על מדגם של 16 סטודנטים אקראיים מתואר ראשון:

One-Sample Statistics

|     | N  | Mean    | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|-----|----|---------|----------------|-----------------|
| age | 16 | 23.4375 | 2.50250        | .62562          |

One-Sample Test

|     | Test Value = 23 |    |                 |                 |                                           |        |
|-----|-----------------|----|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|--------|
|     | t               | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |        |
|     |                 |    |                 |                 | Lower                                     | Upper  |
| age | .699            | 15 | .495            | .43750          | -.8960                                    | 1.7710 |

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?  
 ב. מה ערכו של הפרמטר לפי השערת האפס?  
 ג. רשום רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת גיל הסטודנטים באוניברסיטה לתואר ראשון.  
 ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם הגיל הממוצע כיום שונה מבעבר?

- 2) קבוצת ילדים בגיל 6 קיבלה משימה לביצוע. עבור כל ילד בדקו כמה זמן לקח לו לסיים את המשימה בדקות. להלן תוצאות הניתוח הסטטיסטי:

One-Sample Test

|      | Test Value = 4.5 |    |                 |                 |                                           |       |
|------|------------------|----|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|-------|
|      | t                | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |       |
|      |                  |    |                 |                 | Lower                                     | Upper |
| time | -1.853           | 24 | .076            | -.09200         | -.1944                                    | .0104 |

- א. כמה ילדים השתתפו במחקר?  
 ב. מצא רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת זמן ביצוע המשימה עבור ילדים בני 6.  
 ג. מה יש להניח כדי שרווח הסמך מסעיף א' יהיה תקף?  
 ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% שזמן ביצוע המשימה הממוצע נמוך מ-4.5 דקות.

3) להלן פלט מחשב עבור ניתוח סטטיסטי שנעשה בתוכנת SPSS. הניתוח הוא עבור מדגם אקראי של קבוצת נבחנים בבגרות באנגלית.

One-Sample Statistics

|       | N   | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|-------|-----|------|----------------|-----------------|
| grade | ??? | ???  | 19.62787       | 2.95901         |

One-Sample Test

|       | Test Value = 75 |    |                 |                 |                                           |       |
|-------|-----------------|----|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|-------|
|       | t               | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |       |
|       |                 |    |                 |                 | Lower                                     | Upper |
| grade | ???             | 43 | .017            | -7.34091        | -13.3083                                  | ???   |

- א. השלימו את הגדלים החסרים המסומנים בסמני שאלה בפלט.  
 ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים שונה מ-75?  
 ג. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים קטנה מ-75?  
 ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים גדולה מ-75?

4) יצרן סיגריות מפרסם כי תוחלת הניקוטין בסיגריות שהוא מיצר קטנה מ-27 מ"ג. בבדיקה מקרית של 5 סיגריות מתוצרתו נמצאו כמויות הניקוטין הבאות: 21, 21, 20, 24, 22 מ"ג. הניחו כי כמות הניקוטין בסיגריות מפולג נורמאלי.

One-Sample Statistics

|          | N | Mean    | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|----------|---|---------|----------------|-----------------|
| nicotine | 5 | 21.6000 | 1.51658        | .67823          |

One-Sample Test

|          | Test Value = 27 |    |                 |                 |                                           |         |
|----------|-----------------|----|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|---------|
|          | t               | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |         |
|          |                 |    |                 |                 | Lower                                     | Upper   |
| nicotine | -7.962          | 4  | .001            | -5.40000        | -7.2831                                   | -3.5169 |

- א. האם ברמת מובהקות של 5% ניתן להסיק שיש אמת בפרסום?  
 ב. אם היינו מוסיפים עוד תצפית שערכה 20. כיצד הדבר היה משפיע על הערך Sig ועל המסקנה?  
 ג. בדקו האם ניתן להגיד שתוחלת רמת הניקוטין שונה מ-26 ברמת מובהקות של 5%.



### תשובות סופיות:

- (1) א. הסקה של תוחלת אחת. ב. 23. ג.  $(22.104, 24.771)$ . ד. נקבל  $H_0$ .
- (2) א. 25. ב.  $(4.3056, 4.5104)$ . ג. המשתנה מתפלג נורמלית. ד. נדחה  $H_0$ .
- (3) א.  $n = 44, \bar{X} = 67.66, t = -2.48, upper = -1.3735$ . ב. 0.017. ג. 0.0085. ד. 0.9915.
- (4) א. נכריע שיש אמת בפרסום. ב. המסקנה לא תשתנה. ג. נכריע שהתוחלת שונה מ-26.

## הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

### רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu$  :

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1-\alpha$  ל- $\mu$  :

אם  $\mu_0$  נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$ .

אם  $\mu_0$  לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$ .

### דוגמה:

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו :

$$H_0: \mu = 80, H_1: \mu \neq 80, \alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל:  $79 < \mu < 84$ .  
האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

### פתרון (פתרון מלא בהקלטה):

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל  $H_0$ .

## שאלות:

- (1) חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = 90$ ,  $H_1: \mu \neq 90$ . החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: (87, 97).  
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.
- (2) חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.  
א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.  
ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.
- (3) יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצילין היא 200 מ"ג לקפסולה. משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצילין בקפסולה מתפלגת נורמלית.  
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצילין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.  
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

## תשובות סופיות:

- (1) נקבל השערת.  
(2) א.  $112.87 \leq \mu \leq 118.13$ .  
ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.  
(3) א.  $191.8 \leq \mu \leq 200.2$ . ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

## מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

### רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם  $p_v \leq \alpha$  דוחים את  $H_0$ . מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = P_{H_0}$ .

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = 2P_{H_0}$ .

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

|                                                               |                                          |                                                                                                                                                |                                    |
|---------------------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu > \mu_0$                      | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu < \mu_0$ | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu \neq \mu_0$                                                                                                    | השערת האפס:<br>השערה<br>אלטרנטיבה: |
| 1. $\sigma$ אינה ידועה<br>או<br>2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$ |                                          |                                                                                                                                                | תנאים:                             |
| $P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$                               | $P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$          | אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$<br>אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$ | p-value                            |

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

**דוגמה:**

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 34, 40, 30, 32, 27. הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלי.

- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.
- ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

אוכלוסייה: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

משתנה:  $X$  = זמן נסיעה בדקות.

תנאים:  $X \sim N$ .

פרמטר:  $\mu$ .

א. השערות:  
 $H_0: \mu = 40$   
 $H_1: \mu < 40$

ב. תוצאות המדגם:

$$n = 5, \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34 + 40 + \dots}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2 + 40^2 - \dots - 5 \cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6 - 40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = ( \bar{X} \leq 32.6 ) = P(t \leq -3.39)$$

$$d.f = 5 - 1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$ , לכן דוחים את  $H_0$ .

מסקנה: בר"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

## שאלות:

(1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 1024, 1008, 1005, 996, 997.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות. מהי ה- $\alpha$  המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

(3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 176.2, \sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$

מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוהה מ-174 ס"מ באופן מובהק.

מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \text{א.} & H_0: \mu = 1000 \\ & H_1: \mu \neq 1000 \\ \text{ב.} & 20\% \leq P_v \leq 50\% \end{array}$$

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

(2) 10%.

(3) 1.01, נקבל את  $H_0$ .

## סטטיסטיקה ב

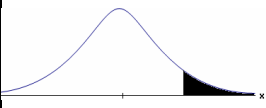
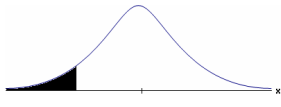
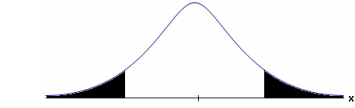
פרק 18 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות..... 87
2. ניתוח פלטים..... 91

## בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

| השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבית:<br>תנאים:                                                                     | $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$<br>$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$                                                                                                                                 | $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$<br>$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$                                                                                                                                  | $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$<br>$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. מדגמים בלתי תלויים<br>2. $\sigma_1, \sigma_2$ לא ידועות אך שוות<br>3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית | $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$<br><br>$t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$<br>דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$<br><br>$-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$<br>דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$<br><br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$<br>דוחים את $H_0$ |

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{השונות המשוקללת:}$$



## חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| נדחה $H_0$ אם מתקיים:                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ | $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$<br>או<br>$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ |
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ |                                                                                                                                                                                                                                                      |

## דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות  $S^2 = 200$ .

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות  $S^2 = 260$ .

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

## שאלות

- (1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

|     |    |    |     |    |     |     |      |
|-----|----|----|-----|----|-----|-----|------|
| 120 | 94 | 90 | 130 | 95 | 112 | 120 | 2012 |
|     | 69 | 74 | 105 | 91 | 82  | 100 | 2013 |

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.  
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

- (2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

| המדינה              | ישראל   | ארה"ב   |
|---------------------|---------|---------|
| גודל המדגם          | 15      | 15      |
| סכום הציונים        | 1560    | 1470    |
| סכום ריבועי הציונים | 165,390 | 147,560 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.  
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

| הקבוצה    | 60W  | 100W |
|-----------|------|------|
| $\bar{X}$ | 1007 | 956  |
| $S$       | 80   | 72   |
| $n$       | 13   | 15   |

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.  
ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?  
ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

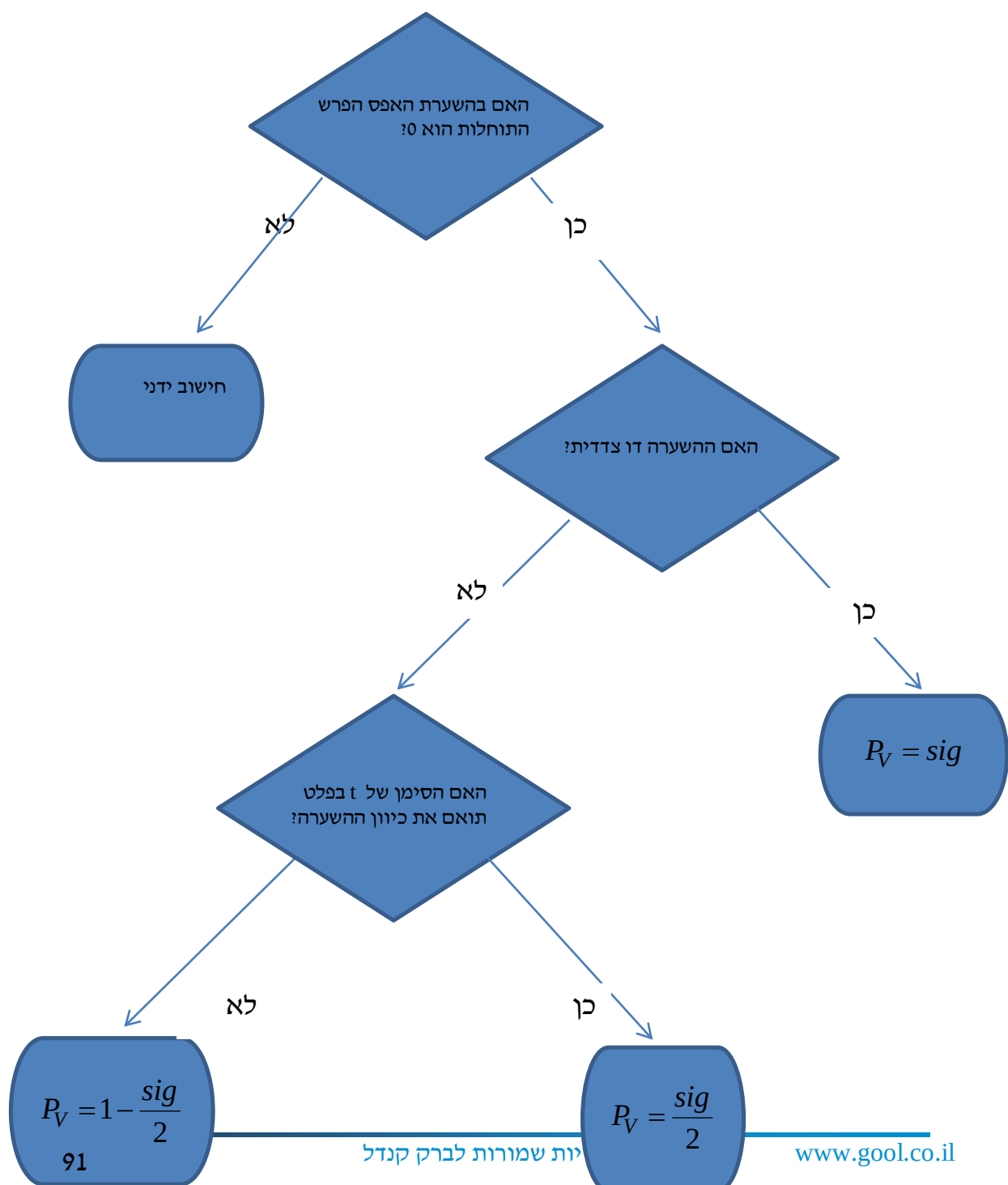
**תשובות סופיות**

- (1) נדחה את  $H_0$ .
- (2) הנחות:
1. סטיות התקן שוות.
  2. המשתנים מתפלגים נורמלית.
- נקבל את  $H_0$ .
- (3) א. נדחה את  $H_0$ . ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.
- ג. לא נדחה את  $H_0$ .

## בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

### ניתוח פלטים – רקע

מובהקות התוצאה על סמך הפלט:



### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים משני אזורים שונים במדינה על מס' האחים והאחיות שלהם. להלן הפלט שהתקבל :

Group Statistics

|                                | Region of the United States | N   | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|--------------------------------|-----------------------------|-----|------|----------------|-----------------|
| Number of Brothers and Sisters | North East                  | 676 | 3.76 | 2.939          | .113            |
|                                | South East                  | 410 | 4.05 | 2.993          | .148            |

Independent Samples Test

|                                |                             | Levene's Test for Equality of Variances |      | t-test for Equality of Means |         |                 |                 |                       |                                           |       |
|--------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------|------|------------------------------|---------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|-------|
|                                |                             | F                                       | Sig. | t                            | df      | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |       |
|                                |                             |                                         |      |                              |         |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper |
| Number of Brothers and Sisters | Equal variances assumed     | .173                                    | .677 | -1.583                       | 1084    | .114            | -.293           | .185                  | -.657                                     | .070  |
|                                | Equal variances not assumed |                                         |      | -1.576                       | 850.945 | .115            | -.293           | .186                  | -.658                                     | .072  |

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
- ב. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם קיים שוויון שונויות בין שני האזורים?
- ג. בדוק האם קיים הבדל בין "South East" ל-"North East" ברמת מובהקות של 5% מבחינת מספר האחים והאחיות הממוצע.
- ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שההפרש הממוצע בין "South East" לבין "North East" חיובי?

## שאלות

- 1) להלן פלט מתוכנת SPSS מתוך מחקר שבחן את רמת האופטימיות של גברים ונשים. רמת האופטימיות נמדדה בסולם ציונים של 1 עד 5.

Group Statistics

|          | GENDER | N   | Mean   | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|----------|--------|-----|--------|----------------|-----------------|
| optimizm | MALE   | 633 | 2.6053 | .49781         | .01979          |
|          | FEMALE | 568 | 2.5503 | .48483         | .02034          |

Independent Samples Test

|          |                             | Levene's Test for Equality of Variances |      | t-test for Equality of Means |          |                 |                 |                       |                                           |        |
|----------|-----------------------------|-----------------------------------------|------|------------------------------|----------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|--------|
|          |                             | F                                       | Sig. | t                            | df       | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |        |
|          |                             |                                         |      |                              |          |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper  |
| optimizm | Equal variances assumed     | .383                                    | .536 | 1.935                        | 1199     | .053            | .05500          | .02842                | -.00076                                   | ?      |
|          | Equal variances not assumed |                                         |      | 1.938                        | 1190.977 | .053            | .05500          | .02838                | -.00068                                   | .11067 |

- א. האם ניתן להניח ששוונות האופטימיות של נשים וגברים שווה ברמת מובהקות של 5%?
- ב. ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הנשים לגברים ברמת האופטימיות הממוצעת שלהם?
- ג. מצא את הגבול העליון של רווח הסמך המסומן בסימן שאלה בפלט. דייק עד 5 ספרות אחרי הנקודה.
- ד. בנה רווח סמך לתוחלת רמת האופטימיות של הגברים ברמת סמך של 95%.

(2) פסיכולוגים טוענים שאנשים שניגשים למבחן אינטליגנציה יותר מפעם אחת נוטים לקבל ציונים גבוהים יותר. להלן הפלט שהתקבל:

### Group Statistics

|       |   | N  | Mean     | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|-------|---|----|----------|----------------|-----------------|
| grade | A | 9  | 96.8889  | 9.40006        | 3.13335         |
|       | B | 11 | 108.4545 | 11.46616       | 3.45718         |

| Independent Samples Test                |                             |      |      |                              |        |                 |                 |                       |                                           |          |
|-----------------------------------------|-----------------------------|------|------|------------------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|----------|
| Levene's Test for Equality of Variances |                             |      |      | t-test for Equality of Means |        |                 |                 |                       |                                           |          |
|                                         |                             | F    | Sig. | t                            | df     | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |          |
|                                         |                             |      |      |                              |        |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper    |
| grade                                   | Equal variances assumed     | .206 | .656 | -2.428                       | 18     | .026            | -11.56566       | 4.76333               | -21.57304                                 | -1.55828 |
|                                         | Equal variances not assumed |      |      | -2.479                       | 17.997 | .023            | -11.56566       | 4.66583               | -21.36832                                 | -1.76299 |

### T-Test

מקרא:

A = נגשו פעם אחת.

B = נגשו יותר מפעם אחת.

א. רשמו את השערות המחקר והסבירו מהו המבחן המתאים כאן.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם היה מדובר על אותם אנשים שציונם נבדק פעם אחרי המבחן הראשון שעשו ופעם אחרי המבחן השני?

ג. האם ניתן לומר כי מידת הפיזור של ציוני אנשים הנבחנים בפעם הראשונה שונה ממידת הפיזור של ציוני האנשים אשר נבחנים בפעם השנייה. בדוק

ברמת מובהקות של  $\alpha = 0.05$ .

ד. האם נכונה טענת הפסיכולוגים ברמת מובהקות של  $\alpha = 0.01$ .

3) כחלק ממחקר בנושא הנישואין בישראל, אחד החוקרים העלה השערה שיש הבדל בממוצע גיל הנישואין (הראשונים), בין נשים הגרות בערים מרכזיות לבין נשים הגרות בערים מרוחקות מהמרכז. לשם כך נדגמו 50 כלות מכל אחת משתי ערים עיר א'-מרכזית ועיר ב'-מרוחקת ונרשם גילן. תוצאות עיבוד הנתונים מופיעות בטבלאות שלהלן:

## T-Test

Group Statistics

| מקום המגורים       | N  | Mean    | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|--------------------|----|---------|----------------|-----------------|
| גיל הנישואין עיר א | 50 | 24.8072 | 1.38978        | .19654          |
| עיר ב              | 50 | 23.0131 | 1.62070        | .22920          |

Independent Samples Test

|              |                             | Levene's Test for Equality of Variances |      | t-test for Equality of Means |        |                 |                 |                       |                                           |         |
|--------------|-----------------------------|-----------------------------------------|------|------------------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|---------|
|              |                             | F                                       | Sig. | t                            | df     | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |         |
|              |                             |                                         |      |                              |        |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper   |
| גיל הנישואין | Equal variances assumed     | .330                                    | .567 | 5.942                        | 98     | .000            | 1.79415         | .30193                | 1.19497                                   | 2.39332 |
|              | Equal variances not assumed |                                         |      | 5.942                        | 95.772 | .000            | 1.79415         | .30193                | 1.19480                                   | 2.39350 |

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
- ב. מצא רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין עיר א לעיר ב מבחינת גיל הנשים הממוצע בנישואין הראשונים.
- ג. האם ניתן לומר ברמת מובהקות של 1% שנשים בערים מרכזיות מתחתנות בגיל מאוחר יותר מאשר נשים הגרות בערים מרוחקות?



## (4) להלן פלט של תוכנת SPSS :

## T-Test

|   | N  | Mean    | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|----|---------|----------------|-----------------|
| X | 26 | 36.3077 | 13.23259       | 2.59513         |
| Y | 24 | 46.4583 | 20.96369       | 4.27920         |

## Independent Samples Test

|                             | Levene's Test for Equality of Variances |      | t-test for Equality of Means |        |                 |                 |                       |                                           |         |
|-----------------------------|-----------------------------------------|------|------------------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|---------|
|                             | F                                       | Sig. | t                            | df     | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |         |
|                             |                                         |      |                              |        |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper   |
| Equal variances assumed     | 4.446                                   | .040 | -2.164                       | ???    | .044            | -10.15064       | ???                   | -20.03781                                 | -.26347 |
| Equal variances not assumed |                                         |      | -2.038                       | 38.267 | .048            | ???             | 5.00462               | -20.27964                                 | -.02164 |

א. השלימו את סימני השאלה בטבלה.

ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שקיים הבדל בין השונות של  $X$  לזה של  $Y$ ?

ג. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהתוחלת של  $X$  גדולה מהתוחלת של  $Y$ ?

ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהתוחלת של  $X$  קטנה מהתוחלת של  $Y$ ?

## תשובות סופיות

- (1) א. נקבל את  $H_0$  ונכריע שיש שוויון שוניות.  
 ב. נקבע שלא קיים הבדל בין נשים לגברים מבחינת האופטימיות הממוצעת.  
 ג. 0.11076  
 ד.  $2.5665 \leq \mu \leq 2.6441$ .
- (2) א. מבחן T להפרש ממוצעים במדגמים בלתי תלויים.  
 ב. מבחן T למדגמים מזווגים.  
 ג. נקבל את  $H_0$ , נקבע לקיום שוויון שוניות.  
 ד. נקבל את  $H_0$ , לא נקבל את טענת הפסיכולוגים.
- (3) א. מבחן T להשוואת תוחלת במדגמים בלתי תלויים.  
 ב.  $1.19497 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 2.39332$  ג. כן.
- (4) א. 10.15, 4.69, -48  
 ב. 0.04  
 ג. 0.978  
 ד. 0.022

## סטטיסטיקה ב

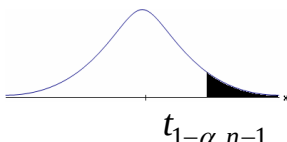
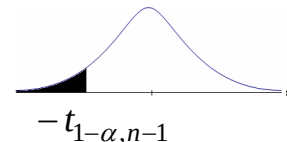
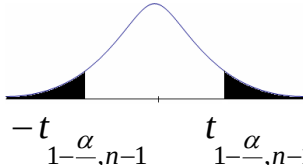
פרק 19 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

|     |                                 |
|-----|---------------------------------|
| 98  | 1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים |
| 102 | 2. ניתוח פלטים                  |

## בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

### בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

| $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D > C$                                                                                                                                  | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D < C$                                                                                                                                    | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D \neq C$                                                                                                                                                                                                                                      | השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבית:           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1. $\sigma_D$ אינה ידועה<br>2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול                                                                                                          |                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              | תנאים:                                     |
| $t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$<br><br>$t_{1-\alpha, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$<br><br>$-t_{1-\alpha, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$<br><br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ | כלל ההכרעה:<br>אזור הדחייה של $H_0$        |
| $\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$                                                                                                         | $\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$                                                                                                           | $\bar{D} > C + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$<br>ו<br>$\bar{D} < C - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$                                                                                                                      | חלופה לכלל הכרעה:<br>נדחה $H_0$ אם מתקיים: |

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}, \quad t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

סטטיסטי המבחן:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחירה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל". לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות. להלן המחירים:

| המוצר / רשת   | מגה בעיר | שופרסל |
|---------------|----------|--------|
| שמפו          | 17       | 18     |
| ג'ל כביסה     | 48       | 57     |
| עוגת גבינה    | 35       | 35     |
| לחם           | 12       | 10     |
| קפה נמס       | 49       | 47     |
| בקבוק יין     | 113      | 142    |
| גבינה בולגרית | 20       | 26     |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

## שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת  $X$  לחברת  $Y$  מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

| חברה/מדינה | ארה"ב | קנדה | הולנד | פולין | מצרים | סין | יפן |
|------------|-------|------|-------|-------|-------|-----|-----|
| $X$        | 1.5   | 2.1  | 2.2   | 3     | 3.5   | 3.2 | 4.2 |
| $Y$        | 1.4   | 2    | 1.9   | 3.1   | 3.2   | 3.2 | 4.2 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים במוצא?

- (2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

|      |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| לפני | 506 | 470 | 420 | 640 | 670 | 390 | 500 | 590 |
| אחרי | 570 | 540 | 430 | 610 | 680 | 510 | 520 | 580 |

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

- (3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

|              |    |    |    |    |     |
|--------------|----|----|----|----|-----|
| סטטיסטיקה א' | 74 | 68 | 90 | 75 | 82  |
| סטטיסטיקה ב' | 80 | 84 | 87 | 76 | 100 |

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים במוצא את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

- א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?  
 ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?  
 ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

- (4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן  $Z$  למדגם יחיד.  
 ב. מבחן  $T$  למדגם יחיד.  
 ג. מבחן  $T$  למדגמים בלתי תלויים.  
 ד. מבחן  $T$  למדגמים מזווגים.

- (5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

|               |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|
| משקל במכשיר 1 | 2.5 | 0.7 | 9.6 | 4.5 |
| משקל במכשיר 2 | 0.5 | 1.7 | 6.9 | 3.5 |

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

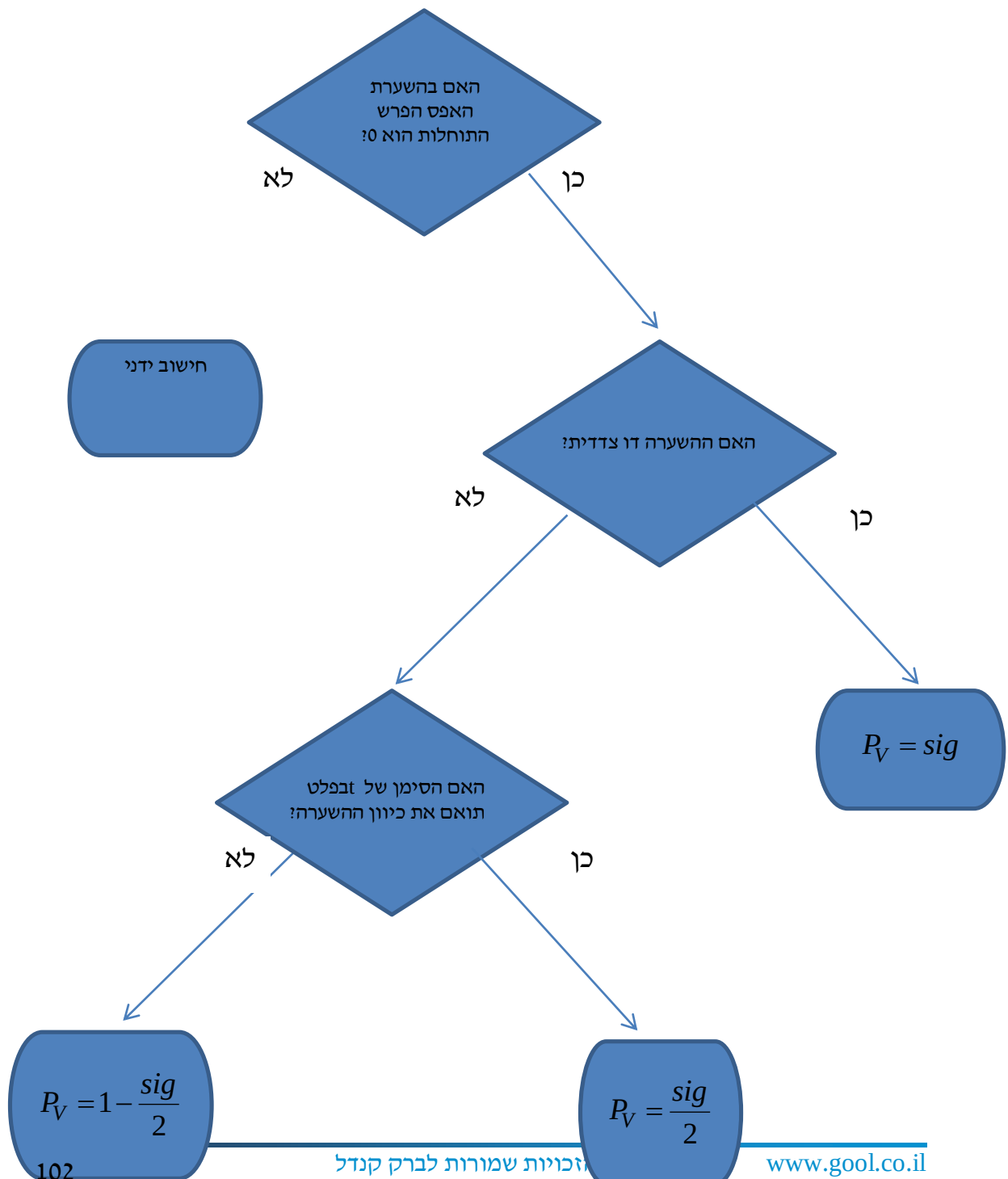
- מבחן Z למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
  - מבחן T למדגמים מזווגים.
- (6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:
- מבחן Z למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
  - מבחן T למדגמים מזווגים.

## תשובות סופיות

- לא נדחה  $H_0$ .
- לא נדחה  $H_0$ .
- א.  $0.25 \leq p \leq 0.5$     ב. 0.5    ג. לא נדחה  $H_0$ .
- ד'.
- ד'.
- ג'.

## בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

מדגמים מזווגים – ניתוח פלטים – רקע





**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

כדי לבדוק את ההשפעה של קורס לגמילה מעישון נלקח מדגם מקרי של 5 נבדקים. עבור כל אחד מהם נמדדה צריכת הסיגריות היומית לפני הקורס וחודשיים אחריו. הניחו שצריכת הסיגריות מתפלגת נורמלית. להלן התוצאות :

| 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | נבדק |
|----|----|----|----|----|------|
| 30 | 28 | 25 | 22 | 40 | לפני |
| 12 | 10 | 13 | 24 | 30 | אחרי |

**Paired Samples Statistics**

|        |        | Mean    | N | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|--------|--------|---------|---|----------------|-----------------|
| Pair 1 | BEFORE | 29.0000 | 5 | 6.85565        | 3.06594         |
|        | AFTER  | 17.8000 | 5 | 8.72926        | 3.90384         |

**Paired Samples Test**

|        |                | Paired Differences |                |                 |                                           | t        | df    | Sig. (2-tailed) |       |
|--------|----------------|--------------------|----------------|-----------------|-------------------------------------------|----------|-------|-----------------|-------|
|        |                | Mean               | Std. Deviation | Std. Error Mean | 90% Confidence Interval of the Difference |          |       |                 |       |
|        |                |                    |                |                 |                                           |          |       |                 |       |
|        |                |                    |                |                 | Lower                                     |          |       |                 | Upper |
| Pair 1 | BEFORE - AFTER | 11.20000           | 8.19756        | 3.66606         | 3.38452                                   | 19.01548 | 3.055 | 4               | .038  |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הקורס יעיל.

## שאלות

- 1) בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים על השכלת הוריהם, להלן הפלט שהתקבל:

| Paired Samples Test |                                                                               |                    |                |                 |                                           |       |       |     |                 |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------|-----------------|-------------------------------------------|-------|-------|-----|-----------------|
|                     |                                                                               | Paired Differences |                |                 |                                           |       | t     | df  | Sig. (2-tailed) |
|                     |                                                                               | Mean               | Std. Deviation | Std. Error Mean | 95% Confidence Interval of the Difference |       |       |     |                 |
|                     |                                                                               |                    |                |                 | Lower                                     | Upper |       |     |                 |
| Pair 1              | Highest Year School Completed, Father - Highest Year School Completed, Mother | -.007              | 3.115          | .100            | -.203                                     | .189  | -.072 | 973 | .943            |

- א. תנו אומדן להפרש הממוצעים.  
 ב. תנו אומדן לטעות התקן של הפרש הממוצעים.  
 ג. האם קיים הבדל מובהק בין השכלת האבות להשכלת האימהות ברמת מובהקות של 5%?

- 2) בתחרות קפיצה למים שופטים באופן קבוע שופט איטלקי ושופט דרום קוריאני. להלן פלט המנתח את הציונים ששופטים אלה נתנו בתחרויות השונות:

Paired Samples Statistics

|        |             | Mean   | N   | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|--------|-------------|--------|-----|----------------|-----------------|
| Pair 1 | Italy       | ???    | 300 | .86742         | .05008          |
|        | South Korea | 8.9183 | ??? | .81992         | .04734          |

Paired Samples Test

|        |                     | Paired Differences |                |                 |                                           | t       | df      | Sig. (2-tailed) |       |
|--------|---------------------|--------------------|----------------|-----------------|-------------------------------------------|---------|---------|-----------------|-------|
|        |                     | Mean               | Std. Deviation | Std. Error Mean | 95% Confidence Interval of the Difference |         |         |                 |       |
|        |                     |                    |                |                 | Lower                                     |         |         |                 | Upper |
| Pair 1 | Italy - South Korea | -.42233            | .36153         | .02087          | -.46341                                   | -.38126 | -20.234 | ???             | ???   |

- א. השלימו את החלקים החסרים בפלט (מסומנים בסימני שאלה).  
 ב. בדקו את הטענה שהשופט הדרום קוריאני נותן בממוצע 0.2 נקודות יותר מאשר השופט האיטלקי ברמת מובהקות של 5%.  
 ג. מהו רווח הסמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין השופטים?  
 ד. בנו את הרווח כעת ברמת סמך של 98% לתוחלת פער בציונים בין השופטים.

3) בדקו את ציוניהם של 44 נבדקים אקראיים במבחן הפסיכומטרי. פעם אחת לפני הכנה (Before) ופעם אחת אחרי הכנה (After).

| Paired Samples Test |                |                    |                |                 |                                           |          |        |    |                 |
|---------------------|----------------|--------------------|----------------|-----------------|-------------------------------------------|----------|--------|----|-----------------|
|                     |                | Paired Differences |                |                 |                                           |          | t      | df | Sig. (2-tailed) |
|                     |                | Mean               | Std. Deviation | Std. Error Mean | 95% Confidence Interval of the Difference |          |        |    |                 |
|                     |                |                    |                |                 |                                           |          |        |    |                 |
|                     |                |                    |                |                 | Lower                                     | Upper    |        |    |                 |
| Pair 1              | Before - After | -7.45455           | 19.28303       | 2.90703         | -13.31712                                 | -1.59197 | -2.564 | 43 | .014            |

- א. רשמו מהו המבחן הסטטיסטי ונסח את ההשערות אליהם מתייחס הפלט.
- ב. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ברמת מובהקות של 5%.
- ג. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ביותר מ-5 נקודות ברמת מובהקות של 5%.
- ד. מצאו רווח סמך לתוחלת שיפור ממוצע הציונים לאחר ההכנה ברמת ביטחון של 95%.

## (4) להלן פלט של תכנת SPSS :

## T-Test

## Paired Samples Statistics

|          | Mean    | N | Std. Deviation | Std. Error<br>Mean |
|----------|---------|---|----------------|--------------------|
| Pair 1 x | 54.0000 | 6 | 5.86515        | 2.39444            |
| y        | 46.5000 | 6 | 10.72847       | 4.37988            |

## Paired Samples Test

|                    | Paired Differences |                   |                    |                                              |          | t  | df | Sig. (2-tailed) |
|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|----------------------------------------------|----------|----|----|-----------------|
|                    | Mean               | Std.<br>Deviation | Std. Error<br>Mean | 95% Confidence Interval of the<br>Difference |          |    |    |                 |
|                    |                    |                   |                    | Lower                                        | Upper    |    |    |                 |
| Pair 1<br>x -<br>y | 7.50000            | ??                | 4.72405            | -4.64356                                     | 19.64356 | ?? | 5  | .173            |

- מלא את החלקים החסרים בטבלה.
- מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שיש הבדל בין  $X$  ל- $Y$  בממוצע?
- האם התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה, ואם כן גדלה או קטנה, אם הינו מוסיפים עוד תצפית שההפרש בין  $X$  ל- $Y$  הוא 0.
- מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש  $X$  גדול מ- $Y$  בממוצע?
- מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש  $X$  קטן מ- $Y$  בממוצע?
- בנו רווח סמך לתוחלת של  $X$  ברמת סמך של 90%.

## תשובות סופיות

- (1) א. -0.007      ב. 0.1      ג. אין הבדל מובהק.
- (2) א.  $d.f = 299$  ,       $n = 300$  ,       $\bar{X} = 8.496$  ,  $\text{Sig} = 0$  .
- ב. נדחה את  $H_0$  .      ג. (0.46341, 0.38126)      ד. (0.4708, 0.3738) .
- (3) א. ראה וידאו.      ב. נדחה את  $H_0$  .      ג. לא נדחה את  $H_0$  .
- ד. (1.592, 13.317) .
- (4) א. 1.5876 , 11.5715      ב. 0.173      ג. יגדל.
- ד. 0.0865      ה. 0.9135      ו.  $49.18 < \mu < 58.82$  .

## סטטיסטיקה ב

פרק 20 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות

תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות..... 108

## הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

### רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu_1 - \mu_2$  :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = C, \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq C$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1 - \alpha$  ל-  $\mu_1 - \mu_2$  :

אם  $C$  נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$ .

אם  $C$  לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

$$\text{להלן השערותיו: } \alpha = 5\%, \quad H_0 : \mu_D = 80, \quad H_1 : \mu_D \neq 80,$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%,  $78 < \mu_D < 83$ .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

## שאלות

(1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.

להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב' :

| סמסטר א | סמסטר ב |
|---------|---------|
| 74      | 80      |
| 68      | 84      |
| 90      | 87      |
| 75      | 76      |
| 82      | 100     |

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

(2) הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו-3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים :

|        |    |    |    |
|--------|----|----|----|
| מרצה X | 82 | 90 | 68 |
| מרצה Y | 68 | 81 | 64 |

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

## שאלות רב-ברירה :

(3) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.

הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח  $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$ .

אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות :

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$  ;  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$  ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה :

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.



- (4) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו :  $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ , רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.  
לכן מסקנת המחקר היא :
- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
  - ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
  - לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של  $D$ .

### תשובות סופיות

- (1) א.  $-3.8 \leq \mu_D \leq 19$  ב. נכריע שיש אמת בפרסום.
- (2) א.  $-8.5 \leq \mu_X - \mu_Y \leq 26.5$  ב. נכריע שאין הבדל.
- (3) ג'.
- (4) א'.

## סטטיסטיקה ב

פרק 21 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

|     |                              |
|-----|------------------------------|
| 111 | 1. מבחן טיב התאמה            |
| 116 | 2. מבחן לאי תלות             |
| 120 | 3. מקדם המתאם של קרמר        |
| 122 | 4. ניתוח פלטים במבחן אי תלות |

## מבחני חי בריבוע

### מבחן טיב התאמה – רקע

מבחן זה בא לבדוק האם אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי התפלגות נתונה. המשתנה הנחקר מחולק למספר קטגוריות ויש לבדוק האם תוצאות המדגם תואמות להתפלגות הנתונה.

#### מבנה המבחן:

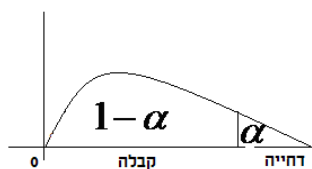
##### השערות:

המשתנה מתפלג לפי התפלגות מסוימת -  $H_0$ .

אחרת -  $H_1$ .

##### כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש.  $d.f = K - 1$ , כאשר  $K$  - מספר הקטגוריות.



הערך הקריטי הוא:  $\chi^2_{1-\alpha, K-1}$ , כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$  בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן  $K-1$ .

אם  $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, K-1}$ , דוחים את השערת האפס.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \text{סטטיסטי המבחן}$$

$O_i$  - השכיחות שנצפתה במדגם בקטגוריה  $i$ .

$p_i$  - הסתברות לקטגוריה  $i$  לפי השערת האפס.

$E_i = np_i$  - שכיחות צפויה במדגם לקטגוריה  $i$  בהנחת השערת האפס.

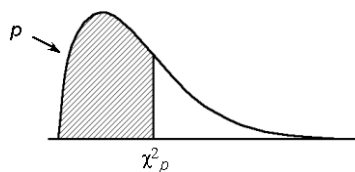
**הערה:**

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא  $E_i \geq 5$  לכל  $i$ . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

במדינה מסוימת שלוש מפלגות. בפרלמנט הנוכחי התפלגות מספר המושבים היא 30% למפלגה A, 60% למפלגה B ו-10% למפלגה C. לקראת הבחירות המתוכננות בשבוע הבא נעשה סקר שכלל 300 אזרחים. בסקר התקבל ש-40% יצביעו למפלגה A, 50% למפלגה B ו-10% למפלגה C. האם תוצאות הסקר תואמות להתפלגות המושבים בפרלמנט הנוכחי? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

## טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה



| df | p                    |                      |                      |                      |        |       |       |      |      |      |      |      |      |
|----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
|    | .005                 | .01                  | .025                 | .05                  | .10    | .25   | .50   | .75  | .90  | .95  | .975 | .99  | .995 |
| 1  | 0.0 <sup>4</sup> 393 | 0.0 <sup>3</sup> 157 | 0.0 <sup>3</sup> 982 | 0.0 <sup>2</sup> 393 | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2  | 0.0100               | 0.0201               | 0.0506               | 0.103                | 0.211  | 0.575 | 1.39  | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3  | 0.0717               | 0.115                | 0.216                | 0.352                | 0.584  | 1.21  | 2.37  | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4  | 0.207                | 0.297                | 0.484                | 0.711                | 1.06   | 1.92  | 3.36  | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5  | 0.412                | 0.554                | 0.831                | 1.15                 | 1.61   | 2.67  | 4.35  | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6  | 0.676                | 0.872                | 1.24                 | 1.64                 | 2.20   | 3.45  | 5.35  | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7  | 0.989                | 1.24                 | 1.69                 | 2.17                 | 2.83   | 4.25  | 6.35  | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8  | 1.34                 | 1.65                 | 2.18                 | 2.73                 | 3.49   | 5.07  | 7.34  | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9  | 1.73                 | 2.09                 | 2.70                 | 3.33                 | 4.17   | 5.90  | 8.34  | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16                 | 2.56                 | 3.25                 | 3.94                 | 4.87   | 6.74  | 9.34  | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60                 | 3.05                 | 3.82                 | 4.57                 | 5.58   | 7.58  | 10.3  | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07                 | 3.57                 | 4.40                 | 5.23                 | 6.30   | 8.44  | 11.3  | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57                 | 4.11                 | 5.01                 | 5.89                 | 7.04   | 9.30  | 12.3  | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07                 | 4.66                 | 5.63                 | 6.57                 | 7.79   | 10.2  | 13.3  | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60                 | 5.23                 | 6.26                 | 7.26                 | 8.55   | 11.0  | 14.3  | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14                 | 5.81                 | 6.91                 | 7.96                 | 9.31   | 11.9  | 15.3  | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70                 | 6.41                 | 7.56                 | 8.67                 | 10.1   | 12.8  | 16.3  | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26                 | 7.01                 | 8.23                 | 9.39                 | 10.9   | 13.7  | 17.3  | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84                 | 7.63                 | 8.91                 | 10.1                 | 11.7   | 14.6  | 18.3  | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43                 | 8.26                 | 9.59                 | 10.9                 | 12.4   | 15.5  | 19.3  | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03                 | 8.90                 | 10.3                 | 11.6                 | 13.2   | 16.3  | 20.3  | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64                 | 9.54                 | 11.0                 | 12.3                 | 14.0   | 17.2  | 21.3  | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26                 | 10.2                 | 11.7                 | 13.1                 | 14.8   | 18.1  | 22.3  | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89                 | 10.9                 | 12.4                 | 13.8                 | 15.7   | 19.0  | 23.3  | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5                 | 11.5                 | 13.1                 | 14.6                 | 16.5   | 19.9  | 24.3  | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2                 | 12.2                 | 13.8                 | 15.4                 | 17.3   | 20.8  | 25.3  | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8                 | 12.9                 | 14.6                 | 16.2                 | 18.1   | 21.7  | 26.3  | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5                 | 13.6                 | 15.3                 | 16.9                 | 18.9   | 22.7  | 27.3  | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1                 | 14.3                 | 16.0                 | 17.7                 | 19.8   | 23.6  | 28.3  | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8                 | 15.0                 | 16.8                 | 18.5                 | 20.6   | 24.5  | 29.3  | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |

## שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים. התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו-17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (3) 200 איש נתבקשו לבחור ספרה באקראי והנה התוצאות שהתקבלו:
- |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                                            |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------------------------------|
| 18 איש בחרו בספרה 0, | 24 איש בחרו בספרה 1, | 17 איש בחרו בספרה 2, | 19 איש בחרו בספרה 3, | 20 איש בחרו בספרה 4, | 18 איש בחרו בספרה 5, | 22 איש בחרו בספרה 6 והיתר בחרו בספרות 7-9. |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------------------------------|
- א. על סמך התוצאות הללו האם בחירת הספרות אקראית? בדקו ברמת מובהקות של 2.5%.
- ב. תנו הערכה למובהקות התוצאה.
- ג. אם נגדיל את גודל המדגם פי 2 ונשמור על אותם יחסים של כמות האנשים במדגם שבחרו בספרות, כיצד הדבר ישפיע על ערכו של הסטטיסטי  $\chi^2$ ? מה תהיה המסקנה במקרה זה?
- (4) מעוניינים לבדוק האם קובייה היא הוגנת. הטילו את הקובייה פעמיים והתבוננו בסכום הוצאות. חזרו על התהליך 72 פעמים. להלן התוצאות שהתקבלו במדגם:
- מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- | מספר הטלות | סכום התוצאות |
|------------|--------------|
| 20         | 2-5          |
| 17         | 6-8          |
| 20         | 9-10         |
| 15         | 11-12        |
- (5) בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:
- | מספר הסוללות הפגומות | 0   | 1   | 2  | 3 ומעלה |
|----------------------|-----|-----|----|---------|
| שכיחות               | 276 | 104 | 12 | 8       |
- מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהסיכוי לסוללה פגומה אינו 20%?

(6) להלן השערות מחקר:  $H_0 : X \sim N(40, 2^2)$ ,  $H_1 : else$

תוצאות המדגם הן :

|        |       |       |         |              |
|--------|-------|-------|---------|--------------|
| מעל 44 | 40-44 | 36-40 | מתחת 36 | $X$          |
| 2A     | 45A   | 50A   | 3A      | מספר הדגימות |

מהו ערכו המקסימלי של A עבורו נקבל את  $H_0$  ברמת מובהקות של 5%?

### תשובות סופיות

- (1) לא נדחה  $H_0$ .
- (2) לא נדחה  $H_0$ .
- (3) א. לא נדחה  $H_0$ . ב. בין 0.95 ל-0.975 ג. יגדל פי 2 ; המסקנה לא תשתנה.
- (4) נכריע שהקובייה אינה הוגנת.
- (5) 0.005.
- (6) 14.

## מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

**מבנה המבחן:**

**השערות:**

אין תלות בין המשתנים  $H_0$ .

יש תלות בין המשתנים  $H_1$ .

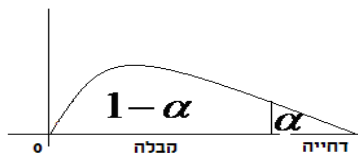
**כלל הכרעה:**

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש  $d.f = (r-1)(c-1)$ . כאשר:  $r$  - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות.  $c$  - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקריטי הוא:  $\chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$ , כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$  בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן  $(r-1)(c-1)$ . אם  $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$  אז דוחים את השערת האפס.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

כאשר:



$O_i$  - השכיחות נצפית במדגם בתא  $i$ .

$E_i$  - שכיחות צפויה במדגם בתא  $i$  בהנחת השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$



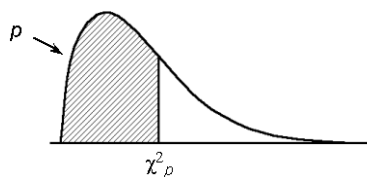
**הערה:**

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא  $E_i \geq 5$  לכל  $i$ . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.  
תנאי חלופי: אין  $E$  קטן מ-1 וגם אין ביותר מ 20% מהתאים  $E$  קטן מ-5.

**דוגמה (הפתרון בהקלטה):**

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?  
יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר:

| המגדר / דעה | בעד | נגד | נמנע | סה"כ |
|-------------|-----|-----|------|------|
| גברים       | 50  | 40  | 10   |      |
| נשים        | 20  | 60  | 20   |      |
| סה"כ        |     |     |      |      |

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$ 

| df | $p$      |         |         |         |        |       |       |      |      |      |      |      |      |
|----|----------|---------|---------|---------|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
|    | .005     | .01     | .025    | .05     | .10    | .25   | .50   | .75  | .90  | .95  | .975 | .99  | .995 |
| 1  | 0.004393 | 0.00157 | 0.00982 | 0.02393 | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2  | 0.0100   | 0.0201  | 0.0506  | 0.103   | 0.211  | 0.575 | 1.39  | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3  | 0.0717   | 0.115   | 0.216   | 0.352   | 0.584  | 1.21  | 2.37  | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4  | 0.207    | 0.297   | 0.484   | 0.711   | 1.06   | 1.92  | 3.36  | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5  | 0.412    | 0.554   | 0.831   | 1.15    | 1.61   | 2.67  | 4.35  | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6  | 0.676    | 0.872   | 1.24    | 1.64    | 2.20   | 3.45  | 5.35  | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7  | 0.989    | 1.24    | 1.69    | 2.17    | 2.83   | 4.25  | 6.35  | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8  | 1.34     | 1.65    | 2.18    | 2.73    | 3.49   | 5.07  | 7.34  | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9  | 1.73     | 2.09    | 2.70    | 3.33    | 4.17   | 5.90  | 8.34  | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16     | 2.56    | 3.25    | 3.94    | 4.87   | 6.74  | 9.34  | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60     | 3.05    | 3.82    | 4.57    | 5.58   | 7.58  | 10.3  | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07     | 3.57    | 4.40    | 5.23    | 6.30   | 8.44  | 11.3  | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57     | 4.11    | 5.01    | 5.89    | 7.04   | 9.30  | 12.3  | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07     | 4.66    | 5.63    | 6.57    | 7.79   | 10.2  | 13.3  | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60     | 5.23    | 6.26    | 7.26    | 8.55   | 11.0  | 14.3  | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14     | 5.81    | 6.91    | 7.96    | 9.31   | 11.9  | 15.3  | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70     | 6.41    | 7.56    | 8.67    | 10.1   | 12.8  | 16.3  | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26     | 7.01    | 8.23    | 9.39    | 10.9   | 13.7  | 17.3  | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84     | 7.63    | 8.91    | 10.1    | 11.7   | 14.6  | 18.3  | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43     | 8.26    | 9.59    | 10.9    | 12.4   | 15.5  | 19.3  | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03     | 8.90    | 10.3    | 11.6    | 13.2   | 16.3  | 20.3  | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64     | 9.54    | 11.0    | 12.3    | 14.0   | 17.2  | 21.3  | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26     | 10.2    | 11.7    | 13.1    | 14.8   | 18.1  | 22.3  | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89     | 10.9    | 12.4    | 13.8    | 15.7   | 19.0  | 23.3  | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5     | 11.5    | 13.1    | 14.6    | 16.5   | 19.9  | 24.3  | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2     | 12.2    | 13.8    | 15.4    | 17.3   | 20.8  | 25.3  | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8     | 12.9    | 14.6    | 16.2    | 18.1   | 21.7  | 26.3  | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5     | 13.6    | 15.3    | 16.9    | 18.9   | 22.7  | 27.3  | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1     | 14.3    | 16.0    | 17.7    | 19.8   | 23.6  | 28.3  | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8     | 15.0    | 16.8    | 18.5    | 20.6   | 24.5  | 29.3  | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |

## שאלות

- (1) נבדקה התלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים. להלן התוצאות:

| שביעות רצון<br>גודל המפעל | נמוכה | בינונית | גבוהה | סה"כ |
|---------------------------|-------|---------|-------|------|
| גדול                      | 182   | 203     | 215   | 600  |
| קטן                       | 154   | 110     | 136   | 400  |
| סה"כ                      | 336   | 313     | 351   | 1000 |

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

- (2) מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה:

| לילה | ערב | יום |        |
|------|-----|-----|--------|
| 70   | 60  | 50  | פגומים |
| 800  | 700 | 600 | תקינים |

האם יש הבדל בין שיעורי הפגומים במשמרות השונות? הסיקו עבור רמת מובהקות  $\alpha = 0.05$ .

- (3) נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא. האם יש קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר? בדקו ברמת בטחון של 95%.

## תשובות סופיות

- (1) נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.  
 (2) נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.  
 (3) נסיק שאין קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר.

## מדדי קשר-מדד הקשר של קרמר – רקע

מתי משתמשים במדד הזה? - כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אפשרי. מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1. ככל שהמדד יותר קרוב לאחד קיים קשר בעוצמה יותר חזקה בין המשתנים.

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים, שאלו 100 גברים ו-100 נשים האם הם בעד/נגד/נמנעים באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה.

| $f(x)$    | נמנע | נגד | בעד | $X/Y$  |
|-----------|------|-----|-----|--------|
| 100       | 10   | 40  | 50  | גבר    |
| 100       | 10   | 60  | 30  | אישה   |
| $n = 200$ | 20   | 100 | 80  | $f(y)$ |

בהקשר של קרמר הטבלה נקראת טבלת O (observed)

$X$  - מין (גבר/אישה) – סולם שמי.

$Y$  - דעה (בעד/נמנע/נגד) – סולם שמי/סדר.

### שלבים בחישוב $r_c$ :

#### שלב א' :

נבנה את טבלת E (Expected)

נעתיק את המסגרת של טבלת O ואז כל  $E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$ .

| $f(x)$  | נמנע | נגד | בעד | $X/Y$  |
|---------|------|-----|-----|--------|
| 100     |      |     |     | גבר    |
| 100     |      |     |     | אישה   |
| $n=200$ | 20   | 100 | 80  | $f(y)$ |

#### שלב ב' :

נחשב  $\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ .

#### שלב ג' :

נחשב:  $r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)} \chi^2}$

כאשר  $L$  מבטא את המספר הקטן מבין מספר השורות או העמודות.

## שאלות

- (1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו.

| מין / השכלה | נמוכה | תיכונית | גבוהה |
|-------------|-------|---------|-------|
| גבר         | 120   | 40      | 20    |
| אישה        | 20    | 20      | 80    |

להלן התוצאות:

האם קיים קשר בין מין להשכלה? נמקו!

- (2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.

ב. האם קיים קשר בין פעילות גופנית למצב בריאותי?

חשבו לפי מדד הקשר של קרמר.

## תשובות סופיות

- (1) קיים קשר בעוצמה בינונית בין המין להשכלה מקדם המתאם של קרמר הוא 0.595.
- (2) א. להלן טבלה: ב. מדד קרמר 0.19 מעיד על קשר בעוצמה נמוכה.

| $y/x$  | תקין | לא תקין | $f(x)$ |
|--------|------|---------|--------|
| כן     | 50   | 10      | 60     |
| לא     | 90   | 50      | 140    |
| $f(y)$ | 140  | 60      | 200    |

## פליטים על מבחן לאי תלות – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

**מבנה המבחן:**

**השערות:**

אין תלות בין המשתנים:  $H_0$ .

יש תלות בין המשתנים:  $H_1$ .

דרגות חופש:  $d.f = (r-1)(c-1)$ .

כאשר:  $r$  - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות.

$c$  - ספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

$O_i$  - השכיחות נצפית במדגם בתא  $i$ .

$E_i$  - שכיחות צפויה במדגם בתא  $i$  בהנחת השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

**הערה:**

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא  $E_i \geq 5$  לכל  $i$ . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש

אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

תנאי חלופי: אין  $E$  קטן מ-1 וגם אין ביותר מ-20% מהתאים  $E$  קטן מ-5.

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במחקר רצו לבדוק את הקשר בין צבע שיער לבין צבע עיניים של אנשים. הפלטים שהתקבלו מצורפים.

- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- ב. כמה קטגוריות יש לכל משתנה?
- ג. רשמו את השערות המחקר.
- ד. מה מספר דרגות החופש?
- ה. כמה אנשים במדגם נמצאו עם שיער חום?
- ו. כמה אנשים היית מצפה במדגם שיהיה להם שיער חום ועיניים ירוקות בהנחה ואין קשר בין צבע שיער לצבע עיניים?
- ז. מתוך הבלונדינים מה אחוז בעלי עיניים כחולות במדגם?
- ח. מתוך בעלי עיניים ירוקות מה אחוז הבלונדינים במדגם?
- ט. מה ערכו של סטטיסטי המבחן ומהי מובהקות התוצאה?
- י. מה מסקנת המחקר?  $\alpha = 5\%$

להלן הפלטים שהתקבלו :

## Case Processing Summary

|                        | Cases |         |         |         |       |         |
|------------------------|-------|---------|---------|---------|-------|---------|
|                        | Valid |         | Missing |         | Total |         |
|                        | N     | Percent | N       | Percent | N     | Percent |
| hair_color * eye_color | 78    | 100.0%  | 0       | 0.0%    | 78    | 100.0%  |

## hair\_color \* eye\_color Crosstabulation

|            |                     |                     | eye_color |        |        | Total  |
|------------|---------------------|---------------------|-----------|--------|--------|--------|
|            |                     |                     | brown     | green  | Blue   |        |
| hair_color | black               | Count               | 13        | 7      | 7      | 27     |
|            |                     | Expected Count      | 10.7      | 8.3    | 8.0    | 27.0   |
|            |                     | % within hair_color | 48.1%     | 25.9%  | 25.9%  | 100.0% |
|            |                     | % within eye_color  | 41.9%     | 29.2%  | 30.4%  | 34.6%  |
|            | brown               | Count               | 12        | 12     | 6      | 30     |
|            |                     | Expected Count      | 11.9      | 9.2    | 8.8    | 30.0   |
|            |                     | % within hair_color | 40.0%     | 40.0%  | 20.0%  | 100.0% |
|            |                     | % within eye_color  | 38.7%     | 50.0%  | 26.1%  | 38.5%  |
|            | blond               | Count               | 6         | 5      | 10     | 21     |
|            |                     | Expected Count      | 8.3       | 6.5    | 6.2    | 21.0   |
|            |                     | % within hair_color | 28.6%     | 23.8%  | 47.6%  | 100.0% |
|            |                     | % within eye_color  | 19.4%     | 20.8%  | 43.5%  | 26.9%  |
| Total      | Count               | 31                  | 24        | 23     | 78     |        |
|            | Expected Count      | 31.0                | 24.0      | 23.0   | 78.0   |        |
|            | % within hair_color | 39.7%               | 30.8%     | 29.5%  | 100.0% |        |
|            | % within eye_color  | 100.0%              | 100.0%    | 100.0% | 100.0% |        |

## Chi-Square Tests

|                              | Value              | df | Asymp. Sig. (2-sided) |
|------------------------------|--------------------|----|-----------------------|
| Pearson Chi-Square           | 5.880 <sup>a</sup> | 4  | .208                  |
| Likelihood Ratio             | 5.641              | 4  | .228                  |
| Linear-by-Linear Association | 2.682              | 1  | .101                  |
| N of Valid Cases             | 78                 |    |                       |

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6.19.



## שאלות

- 1) בסקר שנעשה על ידי משרד ראש הממשלה נדגמו 60 אזרחים. כל אזרח נשאל על מגדרו והאם הוא בעד הקמת מדינה פלסטינית.
- א. מה ההשערות הנבדקות ומהו סטטיסטי המבחן?
  - ב. אם סטטיסטי המבחן היה גדל כיצד הדבר היה משפיע על SIG שבפלט.
  - ג. האם קיים קשר בין מגדר ודעה ברמת מובהקות של 5%?
  - ד. מהו האומדן לאחוז התומכים במדינה פלסטינית מתוך הגברים?
  - ה. איזה אחוז מהנשאלים שהיו בעד מדינה פלסטינית הם גברים?

להלן הפלטים:

## Chi-Square Tests

|                                 | Value              | df | Asymp. Sig.<br>(2-sided) |
|---------------------------------|--------------------|----|--------------------------|
| Pearson Chi-Square              | 1.973 <sup>a</sup> | 2  | .373                     |
| Likelihood Ratio                | 1.987              | 2  | .370                     |
| Linear-by-Linear<br>Association | 1.882              | 1  | .170                     |
| N of Valid Cases                | 60                 |    |                          |

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5.

b. The minimum expected count is 7.25.

## gender \* opinion Crosstabulation

|        |        |                  | opinion |        |            | Total  |
|--------|--------|------------------|---------|--------|------------|--------|
|        |        |                  | yes     | now    | no opinion |        |
| gender | Male   | Count            | 10      | 10     | 9          | 29     |
|        |        | Expected Count   | 12.6    | 9.2    | 7.3        | 29.0   |
|        |        | % within gender  | 34.5%   | 34.5%  | 31.0%      | 100.0% |
|        |        | % within opinion | 38.5%   | 52.6%  | 60.0%      | 48.3%  |
|        |        | % of Total       | 16.7%   | 16.7%  | 15.0%      | 48.3%  |
|        | female | Count            | 16      | 9      | 6          | 31     |
|        |        | Expected Count   | 13.4    | 9.8    | 7.8        | 31.0   |
|        |        | % within gender  | 51.6%   | 29.0%  | 19.4%      | 100.0% |
|        |        | % within opinion | 61.5%   | 47.4%  | 40.0%      | 51.7%  |
|        |        | % of Total       | 26.7%   | 15.0%  | 10.0%      | 51.7%  |
| Total  |        | Count            | 26      | 19     | 15         | 60     |
|        |        | Expected Count   | 26.0    | 19.0   | 15.0       | 60.0   |
|        |        | % within gender  | 43.3%   | 31.7%  | 25.0%      | 100.0% |
|        |        | % within opinion | 100.0%  | 100.0% | 100.0%     | 100.0% |
|        |        | % of Total       | 43.3%   | 31.7%  | 25.0%      | 100.0% |

2) להלן פלט על סמך סקר שנעשה בקרב סטודנטים, בסקר נשאלו הסטודנטים על המוזיקה אותה הם מעדיפים וצורת הבילוי המועדפת עליהם.

Crosstab

Count

|        |       | בילוי |       |        | Total |
|--------|-------|-------|-------|--------|-------|
|        |       | קריאה | ספורט | מועדון |       |
| מוזיקה | רוק   | 0     | 0     | 11     | 11    |
|        | פופ   | 1     | 6     | 8      | 15    |
|        | קלאסי | 5     | 6     | 9      | 20    |
| Total  |       | 6     | 12    | 28     | 46    |

Chi-Square Tests

|                    | Value               | df | Asymp. Sig. (2-sided) |
|--------------------|---------------------|----|-----------------------|
| Pearson Chi-Square | 11.929 <sup>a</sup> | ?  | .018                  |
| N of Valid Cases   | 46                  |    |                       |

a. 5 cells (55.6%) have expected count less than 5.

b. The minimum expected count is 1.43.

- א. בין אלו משתנים נבדק הקשר? כמה קטגוריות לכל משתנה?
- ב. האם התנאים של המודל מתקיימים?
- ג. מה מספר דרגות החופש במבחן הנ"ל?
- ד. מה ההשערות של המבחן?

- 3) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין רמת הכנסה של משפחה לבין צריכת עגבניות אורגניות. הפלטים מצורפים.
- א. השלימו את שלושת המספרים החסרים בטבלה (היכן שיש סימני שאלה).
- ב. מה ערכו של חי בריבוע הסטטיסטי.
- ג. תנו הערכה למובהקות התוצאה לבדיקת הקשר בין רמת הכנסה של משפחה לבין צריכת עגבניות אורגניות.

Crosstabulation רמת\_הכנסה \* צרכן עגבניות

|                            |                       | צרכן עגבניות |           | Total  |
|----------------------------|-----------------------|--------------|-----------|--------|
|                            |                       | אורגני       | לא אורגני |        |
| הרבה מתחת לממוצע רמת_הכנסה | Count                 | 17           | 42        | 59     |
|                            | % within רמת_הכנסה    | 28.8%        | ?         | 100.0% |
|                            | % within צרכן עגבניות | 13.6%        | 33.6%     | 23.6%  |
| מתחת לממוצע                | Count                 | 27           | 22        | 49     |
|                            | % within רמת_הכנסה    | 55.1%        | 44.9%     | 100.0% |
|                            | % within צרכן עגבניות | ?            | 17.6%     | 19.6%  |
| ממוצע                      | Count                 | 31           | 29        | 60     |
|                            | % within רמת_הכנסה    | 51.7%        | 48.3%     | 100.0% |
|                            | % within צרכן עגבניות | 24.8%        | 23.2%     | 24.0%  |
| מעל הממוצע                 | Count                 | 44           | 26        | 70     |
|                            | % within רמת_הכנסה    | 62.9%        | 37.1%     | 100.0% |
|                            | % within צרכן עגבניות | 35.2%        | 20.8%     | 28.0%  |
| הרבה מעל הממוצע            | Count                 | ?            | 6         | 12     |
|                            | % within רמת_הכנסה    | 50.0%        | 50.0%     | 100.0% |
|                            | % within צרכן עגבניות | 4.8%         | 4.8%      | 4.8%   |
| Total                      | Count                 | 125          | 125       | 250    |

- 4) חוקר בדק את הקשר בין צבע השיער לבין צבע העיניים בעזרת מבחן חי בריבוע בקרב 52 נבדקים. תוצאות המבחן מוצגות בטבלה. בנוסף ידוע כי סטטיסטי המבחן שהתקבל מעיבוד הנתונים הוא 8.08.
- מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 1%?
  - מה ערכו של E עבור עיניים כחולות וצבע שיער כהה.
  - מה יהיה בקירוב ערכו של מקדם המתאם של קרמר?
  - מהי פרופורציית בעלי צבע השיער הבהיר מקרב בעלי העיניים הירוקות?

להלן הפלט:

Crosstabulation צבע עיניים \* צבע שיער

|            |      | צבע שיער   |        | Total  |        |
|------------|------|------------|--------|--------|--------|
|            |      | כהה        | בהיר   |        |        |
| צבע עיניים | כחול | Count      |        |        |        |
|            |      | % within   | 50.0%  | 50.0%  | 100.0% |
|            |      | % within   | 21.6%  | 53.3%  | 30.8%  |
|            |      | % of Total | 15.4%  | 15.4%  | 30.8%  |
|            | חום  | Count      |        |        |        |
|            |      | % within   | 83.3%  | 16.7%  | 100.0% |
|            |      | % within   | 27.0%  | 13.3%  | 23.1%  |
|            |      | % of Total | 19.2%  | 3.8%   | 23.1%  |
|            | ירוק | Count      |        |        |        |
|            |      | % within   | 79.2%  | 20.8%  | 100.0% |
|            |      | % within   | 51.4%  | 33.3%  | 46.2%  |
|            |      | % of Total | 36.5%  | 9.6%   | 46.2%  |
| Total      |      | Count      |        |        |        |
|            |      | % within   | 71.2%  | 28.8%  | 100.0% |
|            |      | % within   | 100.0% | 100.0% | 100.0% |
|            |      | % of Total | 71.2%  | 28.8%  | 100.0% |

- 5) במחקר מסוים רצו לבדוק האם יש קשר בין המגדר להוצאה על לבוש במשך שנה. דגמו באופן מקרי גברים ונשים ובדקו את רמת ההוצאה שלהם על לבוש בשנה האחרונה. חוקר א' בדק האם קיים הבדל בתוחלות ההוצאה בין גברים לנשים. חוקר ב' קיבץ את ההוצאה לקטגוריות ובאופן הזה בדק האם קיים הבדל בהתפלגות ההוצאה בין גברים לנשים. הקטגוריות חולקו לשלוש קבוצות הוצאה.
- איזה פלט מתאים לאיזה אחד מהחוקרים? נמקו.
  - מה מסקנתו של חוקר א'? בדקו ברמת מובהקות  $\alpha = 0.05$ . (רשמו השערות, נסחו הנחות, ציינו כלל החלטה ותנו מסקנה במונחי המשתנים).
  - איזו טעות יכולה להיות במסקנתו של חוקר א'? נסחו את הטעות במונחי השאלה.
  - מהי מסקנתו של חוקר ב'? בדקו ברמת מובהקות  $\alpha = 0.05$ . (רשמו השערות, נסחו הנחות, ציינו כלל החלטה ורשמו מסקנה במונחי המשתנים).
  - איזו טעות יכולה להיות במסקנתו של חוקר ב'? נסחו זאת במונחי השאלה. כיצד ניתן ליישב את מסקנות שני החוקרים?

להלן פלט ראשון:

## T-Test

## Group Statistics

| gender         | N  | Mean   | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|----------------|----|--------|----------------|-----------------|
| female         | 40 | 2.9000 | 1.15025        | .18187          |
| male           | 40 | 2.6000 | 2.52982        | .40000          |
| dimensio<br>n1 |    |        |                |                 |

## Independent Samples Test

| Independent Samples Test |                             |                                         |      |                              |        |                 |                 |                       |                                           |         |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------|------|------------------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|---------|
|                          |                             | Levene's Test for Equality of Variances |      | t-test for Equality of Means |        |                 |                 |                       |                                           |         |
|                          |                             | F                                       | Sig. | t                            | df     | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |         |
|                          |                             |                                         |      |                              |        |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper   |
|                          |                             |                                         |      |                              |        |                 |                 |                       |                                           |         |
| expose                   | Equal variances assumed     | 16.805                                  | .000 | .683                         | 78     | .497            | .30000          | .43941                | -.57479                                   | 1.17479 |
|                          | Equal variances not assumed |                                         |      | .683                         | 54.464 | .498            | .30000          | .43941                | -.58078                                   | 1.18078 |

להלן פלט שני:

**Crosstabs****Case Processing Summary**

|                   | Cases |         |         |         |       |         |
|-------------------|-------|---------|---------|---------|-------|---------|
|                   | Valid |         | Missing |         | Total |         |
|                   | N     | Percent | N       | Percent | N     | Percent |
| gender * category | 80    | 100.0%  | 0       | .0%     | 80    | 100.0%  |

**gender \* category Crosstabulation**

|        |        |                   | category |        |        | Total  |
|--------|--------|-------------------|----------|--------|--------|--------|
|        |        |                   | a        | b      | c      |        |
| gender | Female | Count             | 2        | 30     | 8      | 40     |
|        |        | Expected Count    | 11.0     | 21.0   | 8.0    | 40.0   |
|        |        | % within gender   | 5.0%     | 75.0%  | 20.0%  | 100.0% |
|        |        | % within category | 9.1%     | 71.4%  | 50.0%  | 50.0%  |
|        | Male   | Count             | 20       | 12     | 8      | 40     |
|        |        | Expected Count    | 11.0     | 21.0   | 8.0    | 40.0   |
|        |        | % within gender   | 50.0%    | 30.0%  | 20.0%  | 100.0% |
|        |        | % within category | 90.9%    | 28.6%  | 50.0%  | 50.0%  |
| Total  |        | Count             | 22       | 42     | 16     | 80     |
|        |        | Expected Count    | 22.0     | 42.0   | 16.0   | 80.0   |
|        |        | % within gender   | 27.5%    | 52.5%  | 20.0%  | 100.0% |
|        |        | % within category | 100.0%   | 100.0% | 100.0% | 100.0% |

**Chi-Square Tests**

|                    | Value               | df | Asymp. Sig. (2-sided) |
|--------------------|---------------------|----|-----------------------|
| Pearson Chi-Square | 22.442 <sup>a</sup> | 2  | .000                  |
| Likelihood Ratio   | 25.064              | 2  | .000                  |
| N of Valid Cases   | 80                  |    |                       |

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 8.00.

## תשובות סופיות

- (1) א. 1.973      ב. קטן .      ג. לא נדחה  $H_0$  .      ד. 34.5%      ה. 38.5% .
- (2) א. בילוי מועדף ומוזיקה מועדפת עם 3 קטגוריות לכל משתנה .      ב. לא      ג. 4 .      ד.  $H_0$  אין תלות בין בילוי מועדף למוזיקה מועדפת .  
 $H_1$  יש תלות בין בילוי מועדף למוזיקה מועדפת .
- (3) א. 6, 21.6%, 71.2%      ב. 15.8      ג. קטן מ-0.005 .
- (4) א. לא נדחה  $H_0$  .      ב. 11.4      ג. 0.394      ד. 20.8% .
- (5) א. פלא א' - חוקר א', פלא ב' - חוקר ב' .      ב. נקבל את  $H_0$  .      ג. טעות מסוג שני- הכרענו שאין הבדל בין גברים לנשים למרות שיש במציאות הבדל .  
 ד. נקבל את  $H_1$  .      ה. טעות מסוג ראשון- הכרענו שיש קשר בין מין להוצאה למרות שבמציאות אין קשר .  
 ו. כל חוקר פעל בשיטה סטטיסטית שונה ובמצב כזה יתכן מסקנות סותרות .



## סטטיסטיקה ב

פרק 22 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

תוכן העניינים

1. שאלות רב ברירה ( אמריקאיות) ..... 133

### שאלות סיכום – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

(1) בבדיקת השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות  $\alpha = 0.01$ , נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות אותם נתונים ברמת מובהקות  $\alpha = 0.05$ ?

- השערת האפס הייתה נדחית.
- השערת האפס לא הייתה נדחית.
- ההשערה המחקרית הייתה נדחית.
- בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

(2) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

(3) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

מהן ההשערות הנבדקות? (ההפרש חושב  $X - Y$ )

|    |    |    |    |                   |
|----|----|----|----|-------------------|
| 68 | 82 | 93 | 69 | לפני הנישואין - X |
| 71 | 84 | 88 | 80 | לאחר הנישואין - Y |

- $H_1: \mu_d < 0, H_0: \mu_d = 0$
- $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0, H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$
- $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0, H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$
- $H_1: \mu_d > 0, H_0: \mu_d = 0$

(4) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(5) ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1 במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהצפון לבין זה של כלל הילדים יש לערוך \_\_\_\_\_, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזה של ילדים המתגוררים בצפון יש לערוך \_\_\_\_\_.

יש להניח שההנחות הדרושות מתקיימות.

- מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים ; מבחן T לממוצע יחיד.

(6) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(7) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות :

|    |    |    |    |               |
|----|----|----|----|---------------|
| 68 | 82 | 93 | 69 | לפני הנישואין |
| 71 | 84 | 88 | 80 | לאחר הנישואין |

באיזה התפלגות משתמשים לבדיקת ההשערות, ובכמה דרגות חופש :

- ההתפלגות Z ללא דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-3 דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-6 דרגות חופש.
- ההתפלגות  $\chi^2$  ו-3 דרגות חופש.

- (8) שני סטטיסטיקאים בודקים השערות ברמת מובהקות  $\alpha = 0.05$  על סמך אותו מדגם. סטטיסטיקאי א' בודק את ההשערה:  $H_0: \mu = 20$  כנגד האלטרנטיבה  $H_1: \mu \neq 20$  ומחליט לא לדחות את השערת האפס. סטטיסטיקאי ב' בודק את ההשערה  $H_0: \mu \leq 20$  כנגד האלטרנטיבה  $H_1: \mu > 20$  מה יחליט סטטיסטיקאי ב'?
- לדחות את השערת האפס.
  - לא לדחות את השערת האפס.
  - ללא נתונים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.
- (9) חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לומר?
- הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
  - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
  - הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.
  - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
- (10) רמת הכולסטרול בדמם של אנשים מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וסטיית תקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר. נניח שסטיית התקן אצל צמחונים זהה לסטיית התקן של כלל האנשים. במדגם של 20 צמחונים התקבל ממוצע רמת כולסטרול 174.5 מ"ג. אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- טעות מסוג ראשון.
  - טעות מסוג שני.
  - טעות מסוג שלישי.
  - לא ניתן לדעת כיוון שאנו לא יודעים מה התוחלת האמתית אצל הצמחונים.

- 11** שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה. חוקר א' ניסח השערה דו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית. מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?
- אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באותה רמת מובהקות.
  - אם חוקר א' יקבל את השערת האפס גם חוקר ב' יקבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
  - אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
  - אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.
- 12** ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75. מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?
- תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.
  - ממוצע ציוני העולים במדגם.
  - תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.
  - ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.
- 13** חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסוג 1. מה מהבאים נכון?
- החוקר דחה את השערת  $H_0$  כאשר היא הייתה נכונה.
  - החוקר דחה את השערת  $H_1$  כאשר היא הייתה נכונה.
  - החוקר לא דחה את השערת  $H_0$  כאשר היא הייתה לא נכונה.
  - המדגם של החוקר שייד בפועל להתפלגות הדגימה של  $H_1$ .
- 14** חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינת מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.
  - מבחן T למדגמים מזווגים, עם 39 דרגות חופש.
  - מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.
  - מבחן T למדגמים מזווגים עם 38 דרגות חופש.

**15** שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השונות של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות. רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, למהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות. יואב השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים בחודש בו שודרו הפרסומות, למהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה. המבחנים בהם צריכים החוקרים להשתמש הם:

- שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- עידו במבחן T למדגמים מזווגים, ורון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.
- עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

**16** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%. מה תמיד נכון?

- הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
- הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
- הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
- הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

**17** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח:

- השערת האפס הייתה נדחית.
- השערת האפס הייתה לא נדחית.
- לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

**18** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z. רוני השתמש בטבלה של התפלגות T. מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?

- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
- אם רוני ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
- שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
- לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

(19) נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = \mu_0$ ,  $H_1: \mu < \mu_0$ .

- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
  - ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
  - ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

(20) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

- א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
- ב. העוצמה של המבחן גדלה.
- ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
- ד. תשובות א ו-ב נכונות.

(21) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

- א. השערת האפס נכונה.
- ב. השערת האפס נדחתה.
- ג. השערת האפס לא נדחתה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(22) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

|             |          |
|-------------|----------|
| $1 - \beta$ | $\alpha$ |
| א. גדולה    | גדולה    |
| ב. גדולה    | קטנה     |
| ג. קטנה     | גדולה    |
| ד. קטנה     | קטנה     |

(23) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית  $H_0$  קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:

- א. הן  $\alpha$ , והן  $(1 - \beta)$ , יקטנו.
- ב.  $\alpha$  יישאר ללא שינוי ואילו  $(1 - \beta)$  יגדל.
- ג.  $\alpha$  יגדל ואילו  $(1 - \beta)$  יקטן.
- ד. הן  $\alpha$  והן  $(1 - \beta)$  יגדלו.

**(24)** ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

- א. טעות מסוג ראשון.
- ב. טעות מסוג שני.
- ג. טעות מסוג שלישי.
- ד. אין טעות במסקנתו.

**(25)** בבדיקת השערות התקבל ש-  $p\text{-value} = 0.02$ . מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה:

- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
- ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
- ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
- ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

**(26)** מובהקות התוצאה (PV) היא גם:

- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

**(27)** בבדיקת השערות מסוימת התקבל  $p\text{ value} = 0.0254$ , לכן:

- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את  $H_0$ .
- ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את  $H_0$ .
- ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את  $H_0$ .
- ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את  $H_0$ .

**(28)** רמת המובהקות במחקר הייתה 2% לכן.

- א. בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.
- ב. בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.
- ג. בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.
- ד. אף תשובה לא נכונה.



(29) נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . כמו כן נתונות ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = \mu_0$ ,  $H_1: \mu < \mu_0$ .

חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.

$\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובהקות ל-10% אזי:

- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
- כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
- כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

(30) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים

זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה.

לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים

נורמאליים ללא ידיעת השונות האמתית. מספר דרגות החופש במבחן הוא:

א. 9

ב. 19

ג. 18

ד. 8

(31) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני

המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד

מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

|               |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|
| משקל במכשיר 1 | 2.5 | 0.7 | 9.6 | 4.5 |
| משקל במכשיר 2 | 0.5 | 1.7 | 6.9 | 3.5 |

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמליים.

המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

(32) כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני

הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמליים. המטרה להשוות בין האצנים.

המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

**(33)** סטטיסטיקאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עוצמת המבחן וקיבל 0. המשמעות של תוצאה זו היא:

- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

**(34)** סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים. הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח  $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$ . אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות:  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ;  $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ,

- ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:
- לדחות את השערת האפס.
  - לא לדחות את השערת האפס.
  - שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.
  - שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

**(35)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפללים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו:  $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ . רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%. לכן מסקנת המחקר היא:

- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
- ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
- לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של  $D$ .

**(36)** אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

- תמיד נדחה  $H_0$  כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- לא נדחה את  $H_0$  אף פעם.
- לא נדחה את  $H_0$  כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- כל התשובות לא נכונות.

37) חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = 10$ ,  $H_1: \mu \neq 10$ .

לצורך בדיקה הוא לקח מדגם מקרי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמאלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המדגם הוא חישב וקיבל:  $t_x = -2.63$ . לכן המסקנה היא:

- הוא ידחה  $H_0$  ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.
- הוא ידחה  $H_0$  ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.
- הוא ידחה  $H_0$  ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01.
- הוא לא ידחה  $H_0$  ברמת מובהקות 0.1.

38) האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מתוך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון במחקר?

- 0.005
- 0.03
- 0.0287
- 0.05

39) חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ושנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי במצאות השערתה של החוקרת נכונה, סביר כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אזי:

- יקטן הסיכוי לטעות מסוג שני ( $\beta$ ).
- תגדל רמת הביטחון ( $1 - \alpha$ ).
- אף תשובה לא נכונה.
- כל התשובות נכונות.

40) איזה מהמשפטים הבאים נכון תמיד?

- $POWER + \alpha + \beta = 1$
- $POWER = 0.5 - \beta$
- $POWER + \alpha = 1$
- $\beta + \alpha = 1$
- הכול לא נכון.

- 41) מה נכון לומר לגבי הנחת שיוויון השונויות במבחן T למדגמים בלתי תלויים?
- היא אומרת שהשונויות המדגמיות שוות.
  - בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערה על הפרש בין תוחלות.
  - היא חשובה הן עבור מדגמים מזווגים והן עבור מדגמים בלתי תלויים.
  - אף תשובה אינה נכונה.
- 42) חוקר החליט לא לדחות השערה ברמת מובהקות של  $\alpha$ . במידה וחוקר זה היה בודק השערה זו ברמת מובהקות של  $2\alpha$  על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?
- ההשערה תדחה.
  - ההשערה לא תדחה.
  - התשובה תלויה בעוצמת המבחן.
  - לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.
- 43) חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתיות מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:
- א. אפס
  - ב. חיובי
  - ג. שלילי
  - ד. לא ניתן לדעת
- 44) עוצמה שווה ל-1 פרושה:
- א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
  - ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
  - ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.
- 45) מה מהבאים נכון לגבי מבחן T למדגמים מזווגים?
- א. כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.
  - ב. כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.
  - ג. כל הצמדים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה בזה.
  - ד. התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.

- 46** לבדיקת ההשערה החד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית  $H_0: \mu \geq 10$ ,  $H_1: \mu < 10$ . נלקח מדגם והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיית השערת האפס 0.058. לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית  $H_0: \mu = 10$ ,  $H_1: \mu \neq 10$  אז על סמך תוצאת אותו המדגם ברמת מובהקות 0.05:
- ניתן להכריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.
  - מקבלים את השערת האפס.
  - דוחים את השערת האפס.
  - לא ניתן להכריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

- 47** לבדיקת ההשערה החד צדדית ימנית  $H_0: \mu = 55$ ,  $H_1: \mu = 65$ , נלקח מדגם מקרי בגודל  $n$  מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות  $\sigma^2$ . רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות:
- עבור מדגם בגודל  $n$  וברמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות:  $H_0: \mu = 55$ ,  $H_1: \mu = 60$  העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
  - עבור מדגם בגודל  $2n$  ורמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות:  $H_0: \mu = 55$ ,  $H_1: \mu = 65$  העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
  - עבור מדגם בגודל  $n$  ורמת מובהקות 10% לבדיקת ההשערות:  $H_0: \mu = 55$ ,  $H_1: \mu = 65$  העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.
- שלושת הטענות אינן נכונות.
  - טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.
  - טענות 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.
  - טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.

## תשובות סופיות:

| שאלה | תשובה | שאלה | תשובה |
|------|-------|------|-------|
| 1    | א     | 25   | א     |
| 2    | ד     | 26   | א     |
| 3    | א     | 27   | ג     |
| 4    | ג     | 28   | ד     |
| 5    | ג     | 29   | א     |
| 6    | א     | 30   | א     |
| 7    | ב     | 31   | ד     |
| 8    | ג     | 32   | ג     |
| 9    | א     | 33   | א     |
| 10   | א     | 34   | ג     |
| 11   | א     | 35   | א     |
| 12   | א     | 36   | ג     |
| 13   | א     | 37   | א     |
| 14   | א     | 38   | א     |
| 15   | ג     | 39   | א     |
| 16   | א     | 40   | ה     |
| 17   | ג     | 41   | ד     |
| 18   | ב     | 42   | ד     |
| 19   | ג     | 43   | א     |
| 20   | ד     | 44   | ד     |
| 21   | ג     | 45   | ג     |
| 22   | ג     | 46   | ב     |
| 23   | א     | 47   | ד     |
| 24   | ב     |      |       |

## סטטיסטיקה ב

פרק 23 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 146

## ניתוח שונות חד כיוונית

### רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיוונית) הוא מבחן להשוואת תוחלות  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  של  $k$  אוכלוסיות שונות. לכן, בניתוח שונות, השערות המחקר הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{התוחלות של כל האוכלוסיות שוות})$$

$$H_1: \quad \text{אחרת} \quad (\text{לפחות שתיים מהתוחלות שונות})$$

### ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

(1) בכל אוכלוסייה מתוך  $k$  האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.

(2) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות  $\sigma^2$ .

(3) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם  $k$  רמות (levels). כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה: נסמן ב- $n_i$  את גודל המדגם בקבוצה  $i$ .

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad \text{- מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).}$$

$$\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k \quad \text{- ממוצע המדגם הראשון, ..., ממוצע המדגם ה-} k \text{-י.}$$

$$\bar{X} \quad \text{- ממוצע כללי (של כל המדגמים).}$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^k n_i [\bar{X}_i - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים בין הקבוצות:}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^k n_i [n_i - 1] \cdot \hat{S}_i^2 \quad \text{סכום ריבועים בתוך הקבוצות:}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים כללי:}$$

$$SST = SSB + SSW$$



יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה :

| מקור השונות      | סכום הריבועים<br>SS | דרגות חופש<br>$df$ | ממוצע הריבועים<br>MS | F                 |
|------------------|---------------------|--------------------|----------------------|-------------------|
| B - בין הקבוצות  | SSB                 | $k-1$              | $\frac{SSB}{k-1}$    | $\frac{MSB}{MSW}$ |
| W - בתוך הקבוצות | SSW                 | $n-k$              | $\frac{SSW}{n-k}$    |                   |
| T - סה"כ         | SST                 | $n-1$              |                      |                   |

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F(k-1, n-k)$$

אזור דחיית  $H_0 : 1-\alpha : F_{(k-1, n-k)}$

## שאלות

- (1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש קבוצה: קבוצה 1 קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן". כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
- א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?  
מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?
- ב. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
- ג. מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

- (2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה.

| "הס" | "רביץ" | "המתמיד" |
|------|--------|----------|
| 85   | 98     | 78       |
| 83   | 62     | 65       |
| 74   | 55     | 70       |
| 85   | 80     | 90       |
| 75   |        | 56       |

- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?  
רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.
- ב. מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?
- ג. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.
- ד. מלאו את טבלת ANOVA.
- ה. רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
- ו. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

- (3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות. בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

| השיטה      | A   | B   | C   | D   |
|------------|-----|-----|-----|-----|
| גודל המדגם | 12  | 14  | 8   | 12  |
| הממוצע     | 178 | 172 | 180 | 182 |
| סטיית התקן | 4   | 8   | 5   | 3   |

- א. רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.
- ב. מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?
- ג. האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

(4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.

האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות?

בדקו ברמת מובהקות של 5%.

| האופה              | ניר   | מוזס  | שלום |
|--------------------|-------|-------|------|
| סכום הזמנים        | 206   | 212   | 182  |
| סכום ריבועי הזמנים | 10644 | 11250 | 8982 |

(5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

### ANOVA

|                | Sum of Squares | df | Mean Square | F     | Sig. |
|----------------|----------------|----|-------------|-------|------|
| Between Groups | 10.317         | 3  | 3.439       | 1.361 | .279 |
| Within Groups  | 60.648         | 24 | 2.527       |       |      |
| Total          | 70.964         | 27 |             |       |      |

(6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים. השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

### ANOVA

|                | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|----------------|----------------|----|-------------|---|------|
| Between Groups | 357.450        | ב  | ג           | ה | .000 |
| Within Groups  | א              | 17 | ד           |   |      |
| Total          | 522.950        | 19 |             |   |      |

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה נבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

| ANOVA          |                |    |             |        |      | pulse                  |   |                         |         |
|----------------|----------------|----|-------------|--------|------|------------------------|---|-------------------------|---------|
| pulse          |                |    |             |        |      | Tukey HSD <sup>a</sup> |   |                         |         |
|                | Sum of Squares | df | Mean Square | F      | Sig. | dosage                 | N | Subset for alpha = 0.05 |         |
|                |                |    |             |        |      |                        |   | 1                       | 2       |
| Between Groups | 414.400        | 2  | 207.200     | 19.733 | .000 | 30.00                  | 5 | 71.0000                 |         |
| Within Groups  | 126.000        | 12 | 10.500      |        |      | 20.00                  | 5 |                         | 80.2000 |
| Total          | 540.400        | 14 |             |        |      | 10.00                  | 5 |                         | 83.4000 |
|                |                |    |             |        |      | Sig.                   |   | 1.000                   | .299    |

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

## Post Hoc Tests

### Multiple Comparisons

|            |            | pulse<br>Tukey HSD    |            |      |                         |             |
|------------|------------|-----------------------|------------|------|-------------------------|-------------|
| (I) dosage | (J) dosage | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig. | 95% Confidence Interval |             |
|            |            |                       |            |      | Lower Bound             | Upper Bound |
| 10.00      | 20.00      | 3.20000               | 2.04939    | .299 | -2.2675                 | 8.6675      |
|            | 30.00      | 12.40000*             | 2.04939    | .000 | 6.9325                  | 17.8675     |
| 20.00      | 10.00      | -3.20000              | 2.04939    | .299 | -8.6675                 | 2.2675      |
|            | 30.00      | 9.20000*              | 2.04939    | .002 | 3.7325                  | 14.6675     |
| 30.00      | 10.00      | -12.40000*            | 2.04939    | .000 | -17.8675                | -6.9325     |
|            | 20.00      | -9.20000*             | 2.04939    | .002 | -14.6675                | -3.7325     |

\*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.
- הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.
- האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!
- לטבלת ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

- (8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים :
- כמה בתי ספר יש בעיר?
  - כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
  - האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
  - בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

#### Oneway

##### ANOVA

grade

|                | Sum of Squares | df | Mean Square | F      | Sig. |
|----------------|----------------|----|-------------|--------|------|
| Between Groups | 7799.600       | 4  | 1949.900    | 13.586 | .000 |
| Within Groups  | 2870.400       | 20 | 143.520     |        |      |
| Total          | 10670.000      | 24 |             |        |      |

## Post Hoc Tests

## Multiple Comparisons

grade

Scheffe

| (I) school | (J) school | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig.  | 95% Confidence Interval |             |
|------------|------------|-----------------------|------------|-------|-------------------------|-------------|
|            |            |                       |            |       | Lower Bound             | Upper Bound |
| 1.00       | 2.00       | 5.40000               | 7.57681    | .971  | -20.2543                | 31.0543     |
|            | 3.00       | 36.80000*             | 7.57681    | .003  | 11.1457                 | 62.4543     |
|            | 4.00       | 36.40000*             | 7.57681    | .003  | 10.7457                 | 62.0543     |
|            | 5.00       | -2.60000              | 7.57681    | .998  | -28.2543                | 23.0543     |
| 2.00       | 1.00       | -5.40000              | 7.57681    | .971  | -31.0543                | 20.2543     |
|            | 3.00       | 31.40000*             | 7.57681    | .011  | 5.7457                  | 57.0543     |
|            | 4.00       | 31.00000*             | 7.57681    | .013  | 5.3457                  | 56.6543     |
|            | 5.00       | -8.00000              | 7.57681    | .888  | -33.6543                | 17.6543     |
| 3.00       | 1.00       | -36.80000*            | 7.57681    | .003  | -62.4543                | -11.1457    |
|            | 2.00       | -31.40000*            | 7.57681    | .011  | -57.0543                | -5.7457     |
|            | 4.00       | -.40000               | 7.57681    | 1.000 | -26.0543                | 25.2543     |
|            | 5.00       | -39.40000*            | 7.57681    | .001  | -65.0543                | -13.7457    |
| 4.00       | 1.00       | -36.40000*            | 7.57681    | .003  | -62.0543                | -10.7457    |
|            | 2.00       | -31.00000*            | 7.57681    | .013  | -56.6543                | -5.3457     |
|            | 3.00       | .40000                | 7.57681    | 1.000 | -25.2543                | 26.0543     |
|            | 5.00       | -39.00000*            | 7.57681    | .001  | -64.6543                | -13.3457    |
| 5.00       | 1.00       | 2.60000               | 7.57681    | .998  | -23.0543                | 28.2543     |
|            | 2.00       | 8.00000               | 7.57681    | .888  | -17.6543                | 33.6543     |
|            | 3.00       | 39.40000*             | 7.57681    | .001  | 13.7457                 | 65.0543     |
|            | 4.00       | 39.00000*             | 7.57681    | .001  | 13.3457                 | 64.6543     |

\*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

## Homogeneous Subsets

grade

Scheffe<sup>a</sup>

| school | N | Subset for alpha = 0.05 |         |
|--------|---|-------------------------|---------|
|        |   | 1                       | 2       |
| 3.00   | 5 | 45.0000                 |         |
| 4.00   | 5 | 45.4000                 |         |
| 2.00   | 5 |                         | 76.4000 |
| 1.00   | 5 |                         | 81.8000 |
| 5.00   | 5 |                         | 84.4000 |
| Sig.   |   | 1.000                   | .888    |

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

## תשובות סופיות

(1) א. משתנה בלתי תלוי : סוג התרופה. ב. ניתוח שונות חד כיוונית

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

משתנה תלוי : הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונויות.

ב. גודל המדגם : 14. משתנה ב"ת : בית הספר, בעל 3 רמות.

$$g. \bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93, \bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29, \bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46$$

ד. להלן טבלה :

| מקור השונות | SS      | df | MS    | F    |
|-------------|---------|----|-------|------|
| B           | 200.6   | 2  | 100.3 |      |
| W           | 1904.75 | 11 | 173.2 |      |
| סה"כ        | 2105.35 | 13 |       | 0.58 |

$$h. F > 3.98$$

ו. נקבל את  $H_0$ .

(3) א.  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$   
 $H_1 : otherwise$   
 ב. נדחה את  $H_0$ . ג. כן.

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(4) נקבל את  $H_0$  : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \quad (5)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את  $H_0$  : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

(6) להלן טבלה :

### ANOVA

|                | Sum of Squares | df  | Mean Square | F       | Sig. |
|----------------|----------------|-----|-------------|---------|------|
| Between Groups | 357.450        | 2 ב | 178.725 ג   | 18.36 ה | .000 |
| Within Groups  | 165.5 א        | 17  | 9.735 ד     |         |      |
| Total          | 522.950        | 19  |             |         |      |

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (7)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונות.

נדחה את  $H_0$  : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

$$\mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30} \quad \text{ד.} \quad \text{ב. ראה וידאו.} \quad \text{ג. כן.} \quad \text{א.}$$

$$25 \quad \text{ב.} \quad 5 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ג. נדחה את  $H_0$  : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

$$(\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3) \quad \text{ד.}$$